Capitolo 3

Integrale stocastico rispetto ad un moto browniano

3.1 Preliminari

Dato un moto browniano standard $(W_t)_t$, e un numero reale $p \geq 1$, definiamo le seguenti classi di processi. La prima é questa:

$$\Lambda_W^p([0,T]) = \left\{ (X_t)_t \middle| X \quad \text{progr. mis. e t.c. } \mathbf{P}\left\{ \int_0^T |X_s|^p \; ds < +\infty \right\} = 1 \right\}$$

La condizione nella definizione equivale a dire che un elemento di $\Lambda_W^p([0,T])$ ha traiettorie $\mathbf{P}$-q.c. appartenenti a $L^p([0,T], dx)$. Definiamo ora:

$$M_W^p([0,T]) = \left\{ (X_t)_t \middle| X \in \Lambda_W^p \text{ e } E\left[\int_0^T |X_s|^p \; ds \right] < +\infty \right\}$$

D'ora in poi, se non ci sará pericolo di confusione, queste due classi potranno venire indicate con Λ^p e M^p.

Innanzitutto notiamo che $M_W^p([0,T]) \subseteq \Lambda_W^p([0,T])$. Notiamo inoltre che, se definiamo la norma:

$$\|X\|_{M^p} = E\left[\int_0^T |X_s|^p \; ds \right] = \int_{\Omega \times [0,T]} |X_s|^p \; ds \; d\mathbf{P}$$

allora $M_W^p([0,T])$ é uno spazio di Banach contenuto in $L^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,T]), dx \otimes d\mathbf{P})$ secondo questa norma. Chiaramente $M_W^2([0,T])$ verrá ad essere uno spazio di Hilbert secondo il prodotto scalare:

$$< X, Y >_{M^2} = E\left[\int_0^T X_s . Y_s \; ds \right] = \int_{\Omega \times [0,T]} X_s . Y_s \; ds \; d\mathbf{P}$$

Gli elementi di queste due classi di processi possono essere approssimati mediante processi continui. In particolare vale il seguente

Lemma 3.1 *: 1)* $\forall (X_t)_t \in \Lambda^2\ \exists \{(Y_t^{(n)})_t\}_n$ *successione di processi continui e adattati tali che:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |X_t - Y_t^{(n)}|^2\ dt = 0$$

2) $\forall (X_t)_t \in M^2 \exists\ \{(Z_t^{(n)})_t\}_n$ *successione di processi continui ed appartenenti ad* M^2 *tali che:*

$$\lim_{n\to\infty} \|X_t - Z_t\|_{M^2} = 0$$

Dimostrazione: 1) definiamo:

$$\rho(t) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{se } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |t| > 1 \end{cases}$$

siccome $e^{-\frac{1}{1-t^2}} \in L^1([-1,1], dx)$, possiamo trovare c tale che $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)\ dt = \int_{-1}^{1} \rho(t)\ dt = 1$; poniamo allora $X_t = 0 \forall t > T$ e definiamo il processo:

$$\begin{aligned} (J_\varepsilon X)_t &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \rho\left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon}\right) X_s\ ds = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-2\varepsilon}^{t} \rho\left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon}\right) X_s\ ds = \\ &= \int_{-1}^{1} \rho(v) X_{t-\varepsilon v-\varepsilon}\ dv \end{aligned}$$

allora $((J_\varepsilon X)_t)_t$ é adattato a $(\mathcal{F}_t)_t$ e, siccome $(X_t)_t$ ha traiettorie in L^2, quindi integrabili, $((J_\varepsilon X)_t)_t$ ha traiettorie continue, cioé é continuo. Mostriamo ora che $((J_\varepsilon X)_t)_t \in \Lambda^2$:

$$\begin{aligned} \int_0^T |(J_\varepsilon X)_t|^2\ dt &= \int_0^T \left| \int_{-1}^{1} \rho(v)^{\frac{1}{2}} \rho(v)^{\frac{1}{2}} X_{t-\varepsilon v-\varepsilon}\ dv \right|^2\ dt \leq \\ &\leq \int_0^T \left(\int_{-1}^{1} \rho(v)\ dv \right) \left(\int_{-1}^{1} \rho(v) X_{t-\varepsilon v-\varepsilon}^2\ dv \right)\ dt = \\ &= \int_{-1}^{1} \rho(v) \left(\int_0^T X_{t-\varepsilon v-\varepsilon}^2\ dt \right)\ dv \leq \\ &\leq \int_0^T X_t^2\ dt \end{aligned}$$

Mostriamo ora che $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T |(J_\varepsilon X)_t - X_t|^2\ dt = 0$ q.c.. Se il processo $(X_t)_t$ é della forma $X_t = \mathbf{1}_\Omega . \psi(t)$, con $\psi \in C^0([0,T])$, abbiamo:

$$\int_0^T |(J_\varepsilon \psi(t) \quad - \quad \psi(t)|^2\ dt = \int_0^T \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-2\varepsilon}^{t} \rho\left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon}\right) \psi(s)\ ds - \psi(t) \right|^2\ dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-2\varepsilon}^{t} \rho \left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon} \right) \psi(s)\ ds - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^T \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-2\varepsilon}^{t} \rho \left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon} \right) \psi(t)\ ds \right|^2\ dt \leq \\
&\leq \int_0^T \int_{t-2\varepsilon}^{t} \frac{1}{\varepsilon} \rho \left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon} \right) |\psi(t) - \psi(s)|^2\ ds\ dt \leq \\
&\leq T. \sup_{|s-t|<2\varepsilon} |\psi(t) - \psi(s)|^2 \to 0
\end{aligned}
$$

prendiamo allora ω tale che $X_.(\omega) \in L^2([0,T], dx)$, e prendiamo $\psi_\delta \in C^0([0,T])$ tale che $\|X_.(\omega) - \psi_\delta\|_{L^2} < \delta$; allora:

$$
\begin{aligned}
\|(J_\varepsilon X)_t(\omega) \quad - \quad & X_t(\omega)\|_{L^2} = \|(J_\varepsilon X)_t(\omega) - (J_\varepsilon \psi_\delta)_t(\omega) + (J_\varepsilon \psi_\delta)_t(\omega) - \\
& - \psi_\delta(t)(\omega) \psi_\delta(t)(\omega) - X_t(\omega)\|_{L^2} \leq \\
\leq \quad & \|(J_\varepsilon(X_t - \psi_\delta(t))(\omega)\|_{L^2} + \|(J_\varepsilon \psi_\delta)_t(\omega) - \\
& - \psi_\delta(t)(\omega)\|_{L^2} + \|\psi_\delta(t)(\omega) - X_t(\omega)\|_{L^2} \leq \\
\leq \quad & 2\|\psi_\delta(t)(\omega) - X_t(\omega)\|_{L^2} + \|(J_\varepsilon \psi_\delta)_t(\omega) - \psi_\delta(t)(\omega)\|_{L^2} \leq \\
\leq \quad & \|(J_\varepsilon \psi_\delta)_t(\omega) - \psi_\delta(t)(\omega)\|_{L^2} + 2\delta
\end{aligned}
$$

ma, per quanto visto prima, $\|(J_\varepsilon \psi_\delta)_t(\omega) - \psi_\delta(t)(\omega)\|_{L^2}$ puó essere reso piccolo a piacere. Allora il processo dato da $Y_t^{(n)} = (J_{\frac{1}{n}} X)_t$ verifica la tesi.

2) definiamo la funzione:

$$
\phi_N(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| \leq N \\ \frac{Nx}{|x|} & \text{se } |x| > N \end{cases}
$$

allora ϕ_N é lipschitziana con costante di Lipschitz 1. Se prendiamo la successione $\{(Y_t^{(n)})_t\}_n$ di processi continui del punto (1), allora $(\phi_N(Y_t^{(n)}))_t$ e $(\phi_N(X_t))_t$ sono progressivamente misurabili e:

$$
\int_0^T |\phi_N(X_t) - \phi_N(Y_t^{(n)})|^2\ dt \leq \int_0^T |X_t - Y_t^{(n)}|^2\ dt \longrightarrow^{n\to\infty} 0
$$

siccome

$$
\int_0^T |\phi_N(X_t) - \phi_N(Y_t^{(n)})|^2\ dt \leq \int_0^T (2N)^2 dt = 4N^2 T
$$

allora $(\phi_N(X_t))_t, (\phi_N(Y_t^{(n)}))_t \in M^2$ e, , per il teorema di Lebesgue:

$$
\lim_{n\to\infty} \|\phi_N(X_t) - \phi_N(Y_t^{(n)})\|_{M^2} = 0
$$

Siccome:

$$\|\phi_N(X_t) - X_t\|_{M^2} \leq \|\mathbf{1}_{\{|X_t>N\}} X_t\|_{M^2} \longrightarrow^{n\to\infty} 0$$

allora $\forall k\ \exists N, n$ tali che $\|X_t - \phi_N(Y_t^{(n)})\|_{M^2} < \frac{1}{k}$; prendiamo allora $Z_t^{(k)} = \phi_N(Y_t^{(n)})$ e abbiamo la tesi.

□

Si dice **processo elementare** un processo della forma:

$$X_t = \sum X_i.\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t)$$

dove X_{t_i} é $\mathcal{F}_{t_i}$-misurabile. Anche i processi elementari godono di interessanti caratteristiche di densitá. In particolare vale il

Lemma 3.2 *: 1) $\forall (X_t)_t \in \Lambda^2$ esiste una successione di processi elementari $\{(X_t^n)_t\}_n \subset \Lambda^2$ tali che:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |X_t - X_t^n|^2\ dt = 0\mathbf{P}-\text{q.c.}$$

2) $\forall (X_t)_t \in M^2$ esiste una successione di processi elementari $\{(X_t^n)_t\}_n \subset M^2$ tali che:

$$\lim_{n\to\infty} |X_t - X_t^n|_{M^2} = 0$$

Per una dimostrazione vedere Baldi[1] pagg.128 - 132.

□

Possiamo allora definire una isometria a partire dall'insieme dei processi elementari in questo modo:

$I : M_W^2 \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

tale che

$I(X.\mathbf{1}_{[a,b)}) = X(W_b - W_a)$

ed estenderla poi per densitá. Chiamiamo allora questa isometria **integrale stocastico** e la scriviamo cosí:

$$I(X) = \int_0^T X_t\ dW_t$$

L'integrale stocastico gode delle seguenti proprietá:

1) $E[I(X)] = E\left[\int_0^T X_t \, dW_t\right] = 0$

Dimostrazione: per un processo elementare si ha che:

$$E[I(X)] = E[\sum_i X_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})] = \sum_i E[X_i]E[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] = 0$$

e quindi la tesi é vera perché i processi elementari sono densi in M^2.

□

2) $\|I(X)\|_{L^2} = \|X\|_{M^2}$, cioé:

$$E\left[\left|\int_0^T X_t \, dW_t\right|^2\right] = E\left[\int_0^T |X_t|^2 \, dt\right]$$

Dimostrazione: la tesi é vera per un processo elementare per come abbiamo definito l'integrale stocastico, ed é vera per tutti i processi in M^2 perché i processi elementari sono densi in M^2.

□

3) se $Z \in M^2$ é $\mathcal{F}_0$-misurabile, limitata e della forma $Z(t,\omega) = Z(\omega)$, allora $I(ZX) = ZI(X)$

Dimostrazione: se X é un processo elementare, la tesi é immediata; supponiamo ora che X non sia elementare; allora esiste una successione $\{X^{(n)}\}_n$ di processi approssimano X in M^2. Se chiamiamo M la costante per cui $|Z| \leq M$, allora:

$$\|Z(X - X^{(n)})\|_{M^2} \leq M\|X - X^{(n)}\|_{M^2}$$

e quindi:

$$I(ZX_t) = \lim_{n\to\infty} I(ZX_t^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} ZI(X_t^{(n)}) = ZI(X_t)$$

□

A volte si puó aver bisogno di una classe piú grande di M_W^2 su cui definire l'integrale stocastico. Risulta che la classe piú grande su cui si puó definire é Λ_W^2. Vediamo come.

Se $X_t = \sum X_i.\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t)$ é un processo elementare in Λ_W^2, possiamo definire il suo integrale stocastico in questo modo:

$$I(X) = \sum X_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Vogliamo ora estendere la definizione ad ogni processo appartenente a Λ^2_W. Per farlo abbiamo bisogno del lemma:

Lemma 3.3 *: se $X \in \Lambda^2_W$ é un processo elementare, allora $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N > 0$ si ha:*

$$\mathbf{P}\left\{\left|\int_0^T X_t \; dW_t\right| > \varepsilon\right\} \leq \mathbf{P}\left\{\int_0^T X_t^2 \; dt > N\right\} + \frac{N}{\varepsilon^2}$$

Per una dimostrazione vedere Baldi[1] pag. 134.

□

Possiamo ora costruire l'integrale stocastico per un generico processo $X \in \Lambda^2_W$. Per il lemma (3.2), posso approssimare X con una successione di processi elementari $\{X_n\}_n$ in Λ^2_W tali che:

$$\int_0^T |X_n(t) - X(t)|^2 \; dt \longrightarrow^{\mathbf{P}} 0$$

Quindi $\forall \eta > 0, \delta > 0 \; \exists \nu$ tale che se $n, m > \nu$:

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T |X_n(t) - X_m(t)|^2 \; dt > \delta\right\} < \eta$$

e quindi, per il lemma precedente, $\forall N > 0$ abbiamo:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\int_0^T X_n(t) \; dW_t - \int_0^T X_m(t) \; dW_t\right| > \varepsilon\right\} \leq \mathbf{P}\left\{\int_0^T |X_n(t) - X_m(t)|^2 \; dt > N\right\} + \frac{N}{\varepsilon^2}$$

Possiamo scegliere N e ν in modo che l'ultimo membro sia minore di ε. Allora la successione di variabili aleatorie $(\int_0^T X_n(t) \; dW_t)_n$ é di Cauchy in probabilitá, e quindi ammette un limite in probabilitá. Chiamiamo questo limite:

$$I(X) = \int_0^T X_t \; dW_t$$

integrale stocastico del processo $X \in \Lambda^2_W$.

L'integrale stocastico su Λ^2_W non gode allora delle proprietá sulla media e sulla covarianza che godeva quello su M^2_W; tuttavia, rimane questa proprietá:

- se Z é una variabile aleatoria $\mathcal{F}_0$-misurabile e limitata e $X \in \Lambda^2_W$, allora $I(ZX) = ZI(X)$

Dimostrazione: se X é un processo elementare, la tesi é immediata; supponiamo ora che X non sia elementare; allora esiste una successione $\{X_n\}_n$ di processi che approssimano X in Λ^2. Allora i processi $(ZX_n(t))_t$ sono ancora elementari, appartengono a Λ^2 e, poiché $|Z| \leq K$:

$$\int_0^T |ZX_n(t) - ZX(t)|^2 \, dt \leq K \int_0^T |X_n(t) - X(t)|^2 \, dt \longrightarrow^{\mathbf{P}} 0$$

Allora abbiamo:

$$I(ZX_t) = \lim_{n\to\infty} I(ZX_t^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} ZI(X_t^{(n)}) = ZI(X_t)$$

dove i limiti sono intesi in probabilitá.

$\square$

3.2 Integrale stocastico dipendente dal parametro d'integrazione

Definiamo:

$I_t : \Lambda^2_W \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

in questo modo:

$$I_t(X) = I(X.\mathbf{1}_{[0,t)}) = \int_0^t X_u \, dW_u$$

Definiamo inoltre l'integrale stocastico dipendente da un tempo di arresto; se τ é un $(\mathcal{F}t)_t$-tempo di arresto, allora definiamo:

$$I_\tau(X) = I(X\mathbf{1}_{[0,\tau)}) = \int_0^\tau X_u \, dW_u$$

allora I_t ha le seguenti proprietá:

1) $E[I_t(X)] = 0 \; \forall X \in M^2, t \in [0,T]$

2) $I_t(X) - I_s(X) = I(X.\mathbf{1}_{[s,t)}) = \int_{[s,t)} X_u \, dW_u$

3) $I_T(X) = I(X)$

4) $I_t(X)$ é $\mathcal{F}_t$-misurabile

Dimostrazione: se X é un processo elementare, allora:

$$I_t(X) = \sum_{t_{i+1}<t} X_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + X_k(W_t - W_k)$$

é $\mathcal{F}_t$-misurabile; siccome $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ é chiuso in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, allora abbiamo la tesi.

□

5) il processo $(I_t(X))_t$ ha una versione continua $\forall X \in \Lambda_2$

Per una dimostrazione vedere Baldi[1] pagg. 142 - 144.

6) il processo $(I_t(X))_t$ é una martingala $\forall X \in M_2$, ed é una martingala locale $\forall X \in \Lambda_2$

Dimostrazione: provare la condizione di martingala equivale a provare che, se $t > s$, allora $\forall Z$ variabile aleatoria $\mathcal{F}_s$-misurabile e limitata, abbiamo $E[Z(I_t(X) - I_s(X))] = 0$; ma:

$$E[Z(I_t(X) - I_s(X))] = E\left[Z \int_s^t X_u \, dW_u\right] = 0$$

e abbiamo la prima parte della tesi.

Per provare la seconda parte, definiamo i tempi d'arresto:

$$\rho_n = \begin{cases} \inf\{t \in [0,T] \mid |\int_0^t X_u \, dW_u| \geq n\} \\ +\infty \text{ se l'insieme sopra é vuoto} \end{cases}$$

$$\eta_n = \begin{cases} \inf\{t \in [0,T] \mid \int_0^t X_u^2 \, du \geq n\} \\ +\infty \text{ se l'insieme sopra é vuoto} \end{cases}$$

e $\tau_n = \rho_n \wedge \eta_n$; allora anche i τ_n sono dei tempi di arresto; inoltre, $\{\tau_n\}_n$ é crescente, e $\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty$, perché le funzioni $t \to \int_0^t X_u \, dW_u$ e $t \to \int_0^t X_u^2 \, du$ sono continue in t per ogni ω fissato, e dunque limitate. Allora abbiamo che:

$$I_{t\wedge\tau}(X) = \int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau_n)} X_u \, dW_u$$

é l'integrale stocastico di un processo in M^2, ed é quindi una martingala limitata da n. Abbiamo quindi la tesi.

□

3.3 Integrale stocastico rispetto ad un moto browniano $k-$dimensionale

Dato un moto browniano $k-$dimensionale standard $(W(t))_t$, e un numero reale $p \geq 1$, definiamo le seguenti classi di processi a valori nelle matrici $k \times n$-dimensionali:

$$\Lambda^p_W([0,T];\mathbf{R}^{k\times n}) = \left\{ (X_t)_t \;\middle|\; X \text{ progr. mis. e t.c. } \mathbf{P}\left\{\int_0^T \|X_s\|_F^p \, ds < +\infty\right\} = 1 \right\}$$

$$M^p_W([0,T];\mathbf{R}^{k\times n}) = \left\{ (X_t)_t \;\middle|\; X \in \Lambda^p_W \text{ e } E\left[\int_0^T \|X_s\|_F^p \, ds\right] < +\infty \right\}$$

dove la norma matriciale $\|.\|_F$ é la **norma di Frobenius**:

$$\|A\|_F = \text{Tr } (A.^tA) = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$$

che, se calcolata su un vettore di $\mathbf{R}^n$, coincide con quella euclidea.

Notiamo quindi che un processo X appartiene a $\Lambda^p_W([0,T];\mathbf{R}^{k\times n})$ (rispettivamente a $M^p_W([0,T];\mathbf{R}^{k\times n})$) se e solo se $X_{ij} \in \Lambda^p_W([0,T];\mathbf{R})$ (risp. $X_{ij} \in M^p_W([0,T];\mathbf{R})$) $\forall i = 1,...,k, j = 1,...,n$.

D'ora in poi, se non ci sará pericolo di confusione, indicheremo anche queste due classi con Λ^p e M^p (specificando peró sempre se si tratta di processi reali o a valori nelle matrici).

Possiamo definire l'integrale stocastico in questo modo: chiamiamo **integrale stocastico $k-$dimensionale** la variabile aleatoria n-dimensionale:

$$\int_0^T X_t \, dW_t = \left(\sum_{j=1}^k \int_0^T X_{ij}(t) \, dW_j(t) \right)_{i=1,\dots,n}$$

L'integrale stocastico $k-$dimensionale gode delle seguenti proprietá:

1) $E[I(X)] = E\left[\int_0^T X_t \, dW_t\right] = 0$

2) se $i \neq j$, e $(X(t))_t \in M^2_{W_i}$, $(Y(t))_t \in M^2_{W_j}$, allora:

$$E\left[\int_0^T X(t) \, dW_i(t) \int_0^T Y(t) \, dW_j(t)\right] = 0$$

Dimostrazione: se $(X(t))_t$ e $(Y(t))_t$ sono processi della forma $X(t) = X.\mathbf{1}_{[a,b)}(t)$, $Y(t) = Y.\mathbf{1}_{[a,b)}(t)$, con X, Y variabili aleatorie in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_a, \mathbf{P})$, allora:

$$E\left[\int_0^T X(t) \, dW_i(t) \int_0^T Y(t) \, dW_j(t)\right] \;=\; E[X(W_i(b) - W_i(a))Y(W_j(b) - W_j(a))] =$$

$$
\begin{aligned}
&= E[XY]E[W_i(b)-W_i(a)]E[W_j(b)-W_j(a)] = \\
&= E[XY].0 = 0
\end{aligned}
$$

quindi la tesi vale per processi elementari e, per densitá, anche per generici processi $X \in M^2_{W_i}$, $Y \in M^2_{W_i}$.

□

3) l'integrale stocastico k-dimensionale é una isometria tra gli spazi $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbf{R}^n)$ e $M^2_W([0,T]; \mathbf{R}^{k\times n}$; questo significa:

$$
\|I(X)\|_{L^2} = E\left[\left\|\int_0^T X_t\ dW_t\right\|_n^2\right] = E\left[\int_0^T \|X_t\|_F^2\ dt\right] = \|X\|_{M^2}
$$

Dimostrazione: si ha:

$$
\begin{aligned}
E\left[\left\|\int_0^T X_t\ dW_t\right\|_n^2\right] &= E\left[\left\|(\sum_j \int_0^T X_{ij}(t)\ dW_j(t))_i\right\|_n^2\right] = \\
&= E\left[\sum_i (\sum_j \int_0^T X_{ij}(t)\ dW_j(t))_i^2\right] = \\
&= \sum_i \sum_{jk} E\left[\int_0^T X_{ij}(t)\ dW_j(t) \int_0^T X_{ik}(t)\ dW_k(t)\right]
\end{aligned}
$$

Ricordiamo che, se X e Y appartengono a M^2_W, allora:

$$
E\left[\int_0^T X(t)\ dW_j(t) \int_0^T Y(t)\ dW_j(t)\right] = E\left[\int_0^T X(t)Y(t)\ dt\right]
$$

se invece $j \neq k$, abbiamo che:

$$
E\left[\int_0^T X(t)\ dW_j(t) \int_0^T Y(t)\ dW_k(t)\right] = 0
$$

Allora:

$$
E\left[\left\|\int_0^T X_t\ dW_t\right\|_F^2\right] = \sum_i \sum_j E\left[\int_0^T X_{ij}^2(t)\ dt\right] = E\left[\int_0^T \|X_t\|_F^2\ dt\right]
$$

□

4) se Z é una variabile aleatoria $\mathcal{F}_0$-misurabile e limitata, allora: $I(ZX) = ZI(X)$

La dimostrazione é analoga al caso unidimensionale.

Anche in questo caso si puó definire l'integrale stocastico su Λ^2_W tramite la relazione

$$I(X) = \int_0^T X(t)\ dW(t) = (\sum_j \int_0^T X_{ij}(t)\ dW_j(t))_i$$

L'integrale stocastico su Λ^2_W gode allora della proprietá:

1) se Z é una variabile aleatoria $\mathcal{F}_0$-misurabile e limitata, allora: $I(ZX) = ZI(X)$

Per studiare l'integrale stocastico dipendente dal parametro d'integrazione, definiamo:

$I_t : \Lambda^2_W([0,T]; \mathbf{R}^{k\times n}) \to L^2(\Omega, F, P; \mathbf{R}^n)$

in questo modo:

$$I_t(X) = I(X.\mathbf{1}_{[0,t)}) = \int_0^t X_u\ dW_u$$

allora I_t ha le seguenti proprietá:

1) $E[I_t(X)] = 0\ \forall X \in M^2, t \in [0,T]$

2) $I_t(X) - I_s(X) = I(X.\mathbf{1}_{[s,t)}) = \int_{[s,t)} X_u\ dW_u$

3) $I_T(X) = I(X)$

4) $I_t(X)$ é $\mathcal{F}_t$-misurabile

5) il processo $(I_t(X))_t$ é una martingala $\forall X \in M_2$, ed é una martingala locale $\forall X \in \Lambda_2$

Queste proprietá si dimostrano usando le proprietá dell'integrale stocastico unidimensionale.

3.4 Integrale stocastico di una funzione deterministica

Supponiamo ora di avere un processo della forma particolare $(X_t)_t = (f(t))_t$, dove f é una funzione deterministica appartenente a $L^2([0,T])$. Notiamo subito che questo processo appartiene ad M^2_W, e in particolare:

$$\|X\|^2_{M^2} = \int_{\Omega\times[0,T]} X^2_t\ d\mathbf{P}\ dt = \int_{\Omega\times[0,T]} f^2(t)\ dt = \|f\|_{L^2} < +\infty$$

e quindi il processo $I_t(X)$ é ben definito, ed é una martingala. Vogliamo ora provare che é un processo gaussiano, e calcolarne la legge.

Lemma 3.4 *: se $f \in L^2([0,T])$, allora il processo $(I_t(f))_t = (\int_0^T f(t)\ dW_t)_t$ é gaussiano, con media* 0 *e covarianza $Cov(I_s(X), I_t(X)) = \|f\|_{L^2([0,s])}$ $\forall s < t$.*

Dimostrazione: supponiamo che f sia una funzione semplice, della forma $f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}$. Allora:

$$\int_0^T f(t)\ dW_t = \sum_{i=1}^n a_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

é una variabile aleatoria gaussiana; allora, siccome le funzioni semplici sono dense in L^2, allora $\forall f \in L^2$ $\exists \{g_n\}_n \subseteq L^2$ successione di funzioni semplici tali che $g_n \to^{L^2} f$; allora, se definisco la successione di processi $\{X^{(n)}\}_n \subseteq M^2$ tali che

$$X_t^{(n)}(\omega) = g_n(t)\ \forall \omega \in \Omega$$

allora $\|I(I(X^{(n)}) - I(X)\|_{L^2} = \|X - X^{(n)}\|_{M^2} = \|f - g_n\|_{L^2}$, e quindi $I(X^{(n)}) \to^{L^2} I(X)$. Siccome lo spazio delle variabili aleatorie gaussiane é chiuso in L^2, allora $I(X)$ é una variabile aleatoria gaussiana. Chiaramente anche

$$I_t(X) = \int_0^t f(u)\ dW_u = \int_0^T \mathbf{1}_{[0,t)}(u) f(u)\ dW_u$$

é l'integrale stocastico di una funzione deterministica, e quindi la variabile aleatoria $I_t(X)$ é gaussiana.

Verifichiamo infine che il processo $(I_t(X))_t$ é gaussiano; per questo é sufficiente controllare che $\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{R}$, $\forall t_1 < ... < t_n \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i I_{t_i}(X) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_0^{t_i} f(t)\ dW_t = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_0^T \mathbf{1}_{[0,t_i)}(u) f(u)\ dW_u = \\ &= \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{[0,t_i)}(u) f(u) \right)\ dW_u \end{aligned}$$

é l'integrale stocastico di una funzione deterministica, e quindi é una variabile aleatoria gaussiana.

Poiché il processo $(I_t(X))_t$ é gaussiano, allora la sua legge é determinata univocamente dalla sua media e dalla sua covarianza. Calcoliamole:

$$E[I_t(X)] = 0$$

$$\begin{aligned} Cov(I_s(X), I_t(X)) &= Cov\left(\int_0^s f(u)\ dW_u, \int_0^t f(u)\ dW_u \right) = \\ &= Cov\left(\int_0^s f(u)\ dW_u, \int_0^s f(u)\ dW_u + \int_s^t f(u)\ du \right) \end{aligned}$$

Siccome il secondo addendo é indipendente da $\mathcal{F}_s$, allora:

$$Cov(I_s(X), I_t(X)) = Var\left[\int_0^s f(u)\ dW_u\right] = \int_0^s f^2(u)\ du = \|f\|_{L^2([0,s])}$$

e la legge del processo $(I_t(X))_t$ é univocamente determinata.

$\square$