Capitolo 4

Differenziale stocastico e sue proprietá

4.1 Definizione e prime proprietá

Se abbiamo un processo $(X_t)_t$, un moto browniano standard $k-$dimensionale $(W_t)_t$ e due processi $f \in \Lambda^1_W([0,T];\mathbf{R}^{1\times n})$ e $g \in \Lambda^2_W([0,T];\mathbf{R}^{k\times n})$, diciamo che il processo $(X_t)_t$ é dotato del **differenziale stocastico**

$$dX_t = f_t\ dt + g_t\ dW_t$$

se abbiamo:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s\ ds + \int_0^t g_s\ dW_s$$

I processi di questo tipo sono un esempio di **processi di Ito**. Innanzitutto, notiamo subito che questi processi sono a traiettorie continue. Inoltre, la loro scrittura in termini di differenziale stocastico é unica. Ció seguirá dalla seguente:

Proposizione 4.1 *: se $(M_t)_t$ é una martingala della forma $M_t = \int_0^t f_u\ du$, con $(f_t)_t \in \Lambda^1$, allora $f_t = 0\ dt \times \mathbf{P}$-q.c.*

Dimostrazione: supponiamo dapprima che $\int_0^T |f_u|\ du \leq C$ $\mathbf{P}$-q.c.; definisco i tempi $t_n^i = \frac{i}{2^n}T$; allora ho che:

$$\lim_{n\to+\infty} E[\sum_1^{2^n}{}_i(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})^2] = 0$$

Infatti, l'espressione da mediare é dominata $\mathbf{P}$-q.c.:

$$\sum_1^{2^n}{}_i \left(\int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} f_u \ du\right)^2 \leq C \sum_1^{2^n}{}_i \int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} |f_u| \ du = C \int_0^T |f_u| \ du \leq C^2$$

inoltre, per quasi ogni ω, la successione $\sum_{i=1}^{2^n} \left(\int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} f_u \ du\right)^2$ tende a 0 per $n \to \infty$. Per dimostrare questo, notiamo che la funzione $t \to \int_0^t |f_u| \ du$ é continua su $[0,T]$, quindi uniformemente continua, e quindi $\forall \varepsilon \ \exists n_0$ tali che $\forall i, \forall n > n_0$ abbiamo:

$$\int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} |f_u| \ du < \varepsilon$$

allora, $\forall \varepsilon \ \exists n^0$ tale che $\forall n > n_0$:

$$\sum_1^{2^n}{}_i \left(\int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} |f_u| \ du\right)^2 < \varepsilon \int_0^T |f_u| \ du \leq \varepsilon C$$

Per definizione di limite, questo significa che:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^{2^n}{}_i \left(\int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} |f_u| \ du\right)^2 = 0$$

e quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^{2^n}{}_i \left(\int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} f_u \ du\right)^2 = 0$$

Allora, poiché la successione é definitivamente dominata da $C\varepsilon$, per il teorema di Lebesgue il limite della speranza é zero.

A questo punto, peró, notiamo che, siccome $(M_t)_t$ é una martingala, $M_t - M_s$ é ortogonale rispetto a $\mathcal{F}_s \ \forall t > s$; allora:

$$\begin{aligned}
E[(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})^2] &= E[(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})^2] + 2E[M_{t_n^{i-1}}(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})] = \\
&= E[(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}}) + 2M_{t_n^{i-1}}(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})] = \\
&= E[(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})(M_{t_n^i} + M_{t_n^{i-1}})] = E[M_{t_n^i}^2 - M_{t_n^{i-1}}^2]
\end{aligned}$$

quindi, siccome $M_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} E[\sum_1^{2^n}{}_i (M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})^2] &= \lim_{n\to+\infty} \sum_1^{2^n}{}_i E[(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})^2] = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_1^{2^n}{}_i E[M_{t_n^i}^2 - M_{t_n^{i-1}}^2] = \lim_{n\to+\infty} E[M_T^2 - M_0^2] = \\
&= \lim_{n\to+\infty} E[M_T^2] = 0
\end{aligned}$$

allora, $M_T = 0$ $\mathbf{P}$-q.c., e quindi $M_t = 0$ $dt \times \mathbf{P}$-q.c.; ció significa che $f_t = 0$ $dt \times \mathbf{P}$-q.c.

Supponiamo ora che $(f_t)_t \in \Lambda^1$; allora definiamo il tempo di arresto:

$$T_n = \begin{cases} \inf\{0 \leq t \leq T | \int_0^t |f_u| \ du \geq n\} \\ T \text{ se l'insieme di sopra e' vuoto} \end{cases}$$

la successione $(T_n)_n$ é dominata da T, é crescente in n, quindi ha sempre limite. Siccome $(f_t)_t \in \Lambda^1$, allora q.c. $\exists n^*$ tale che $\int_0^t |f_u| \ du < n^*$, quindi $T_{n^*} = T$, e $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ $\mathbf{P}$-q.c.; allora $\forall n \in \mathbf{N} : (M_{t\wedge T_n})_t$ é una martingala e soddisfa le ipotesi della parte precedente, quindi $M_{t\wedge T_n} = 0$ $\forall t$; tuttavia, $\lim_{n\to\infty} M_{t\wedge T_n} = M_{t\wedge T} = M_t$, quindi $M_t = 0$ $\forall t$, ed infine $f_t = 0$ $dt \times \mathbf{P}$-q.c.

$\square$

Corollario 4.2 *: se $(X_t)_t$ é un processo di Ito ammettente due differenziali stocastici $dX_t = f_t^{(i)} \ dt + g_t^{(i)} \ dW_t$, allora $f_t^{(1)} = f_t^{(2)}$ e $g_t^{(1)} = g_t^{(2)}$ $dt \times \mathbf{P}$-q.c.*

Dimostrazione: il processo

$$\left(\int_0^t (f_u^{(1)} - f_u^{(2)}) \ du + \int_0^t (g_t^{(1)} - g_t^{(2)}) \ dW_u\right)_t$$

é identicamente nullo, e quindi é una martingala locale; siccome anche

$$\left(\int_0^t (g_t^{(1)} - g_t^{(2)}) \ dW_u\right)_t$$

é una martingala locale, allora anche

$$\left(\int_0^t (f_u^{(1)} - f_u^{(2)}) \ du\right)_t$$

lo é. Prendiamo allora una successione di tempi di arresto $(T_n)_n$ che la riduca, ed otteniamo che

$$\left(\int_0^{t\wedge T_n} (f_u^{(1)} - f_u^{(2)}) \ du\right)_t$$

é una martingala; per quanto visto prima, $f_t^{(1)} = f_t^{(2)}$ $dt \times \mathbf{P}$-q.c. Abbiamo allora che $\int_0^t (g_u^{(1)} - g_u^{(2)}) \ dW_u = 0$. Siccome il processo

$$\left(\int_0^t (g_u^{(1)} - g_u^{(2)}) \ dW_u\right)_t$$

é una martingala locale, prendiamo la successione $(T_n)_n$ di tempi di arresto:

$$T_n = \begin{cases} \inf\{0 \leq t \leq T | \int_0^t (g_u^{(1)} - g_u^{(2)})\ du \geq n\} \\ T \text{ se l'insieme di sopra e' vuoto} \end{cases}$$

che la riduce; allora $\left(\int_0^{t\wedge T_n} (g_u^{(1)} - g_u^{(2)})\ dW_u\right)_t$ é una martingala costantemente nulla, e abbiamo:

$$0 = \left\| \int_0^{t\wedge T_n} (g_u^{(1)} - g_u^{(2)})\ dW_u \right\|_{L^2}^2 = E\left[\int_0^{t\wedge T_n} (g_u^{(1)} - g_u^{(2)})^2\ du\right]$$

e quindi $g_t^{(1)} = g_t^{(2)}\ \forall t < T_n$ **P**-q.c.. Siccome anche ora $\lim_{n\to\infty} T_n = T$, ho che $g_t^{(1)} = g_t^{(2)}\ \forall t < T$.

□

Se $(X_t)_t$ é un processo di Ito, dotato del differenziale stocastico:

$$dX_t = f_t\ dt + g_t\ dW_t$$

con $(f_t)_t \in \Lambda_W^1$ e $(g_t)_t \in \Lambda_W^2$, allora esiste una modificazione di $(X_t)_t$ a traiettorie continue; infatti, l'integrale $\int_0^t f_u\ du$ é continuo in t, e l'integrale stocastico $\int_0^t g_u\ dW_u$ é continuo in virtú della proposizione (?).

Nel caso di coefficienti $(f_t)_t, (g_t)_t \in M^2([0,T])$, possiamo trovare ulteriori proprietá di continuitá.

Specifichiamo meglio questo concetto, definendo la seguente classe di processi:

$$C_p([0,T]) = \{(X_t)_t | X \in C^0([0,T], L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)) \text{ ed e' progr. mis.}\}$$

allora $C_p([0,T])$ é uno spazio di Banach rispetto alla norma:

$$\|X\|_{C_p([0,T])} = \sup_{t\in[0,T]} \|X_t\|_{L^2(\Omega)}$$

Notiamo subito che $C_p([0,T]) \subseteq M^2([0,T])$, e che vale questa relazione tra le norme:

$$\|X\|_{M^2([0,T])} \leq T.\|X\|_{C_p([0,T])}$$

Vediamo ora in che senso i processi della forma precedente sono continui:

Lemma 4.3 *: se $(f_t)_t, (g_t)_t \in M^2([0,T])$ ed il processo $(X_t)_t$ é definito come sopra, allora $(X_t)_t \in C_p([0,T])$*

Dimostrazione: si verifica banalmente che il processo $(X_t)_t$ é progressivamente misurabile; controlliamo ora che sia un processo continuo:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\left\| \int_t^{t+h} f_t\ dt + \int_t^{t+h} g_t\ dW_t \right\|^2_{L^2(\Omega)} &\le \lim_{h\to 0} 2\left(\left\| \int_t^{t+h} f_t\ dt \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \int_t^{t+h} g_t\ dW_t \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \le \\
&\le \lim_{h\to 0} 2\left(\int_t^{t+h} \|f_t\|^2_{L^2(\Omega)}\ dt + \int_\Omega \int_t^{t+h} |g_t|^2\ dt\ dP \right) = \\
&= \lim_{h\to 0} 2\left(\int_t^{t+h} \left(\|f_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g_t\|^2_{L^2(\Omega)} \right)\ dt \right) = 0
\end{aligned}
$$

cioé $(X_t)_t \in C_p([0,T])$.

□

4.2 Formula di Ito

Dalla definizione di differenziale stocastico si ricava immediatamente che il differenziale della somma é uguale alla somma dei differenziali. Sorge ora il problema di determinare se esiste e quale é il differenziale stocastico di una generica funzione ϕ di t e di X_t rispetto a dt ed a dW_t. Ci viene qui in aiuto il seguente

Teorema 4.4 *: se $\phi \in C^2(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, allora:*

$$
\begin{aligned}
d\phi(t,X_t) &= \left(\phi_t(t,X_t) + \vec{\nabla}_x \phi(t,X_t).f_t + \frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi(t,X_t)(g.{}^tg)_{ij} \right)\ dt + \\
&+ \vec{\nabla}_x \phi(t,X_t).g_t\ dW_t
\end{aligned}
$$

dove $\vec{\nabla}_x$ é il gradiente calcolato limitatamente alle componenti del vettore x.

La formula che ci dá la trasformazione é nota come **formula di Ito**.

Per una dimostrazione formale della formula (nel caso in cui $n = 1$) rimandiamo a Baldi[1], pagg. 155 - 161. Vediamo invece un rapido (ma assolutamente non rigoroso) modo per ricavare questa formula. Interpretiamo la scrittura dx come un "piccolo incremento" nella variabile x, e diamo quindi questo senso a dX_t, dW_t e dt; in virtú del fatto che $W_{t+h} - W_t$ é indipendente da $\mathcal{F}_t$ (e quindi scorrelata da ogni $W_s, s < t$) ed ha legge $N(0,h)$, stabiliamo che $(dW_t)^2 = dt.I$, dove I é la matrice identica $n \times n$.

Scriviamo ora lo "sviluppo di Taylor" di $\phi(t,X_t)$ al secondo ordine, tenendo solo i termini di ordine minore o uguale a dt (quindi, per quanto abbiamo detto, dt, dW_t e $(dW_t)^2$):

$$
d\phi(t,X_t) = \phi_t\ dt + \vec{\nabla}_x\phi(t,X_t)\ dX_t + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi(t,X_t)\ dX_i\ dX_j
$$

e sostituiamo rispettivamente a dX_t il differenziale da cui siamo partiti ed a $dX_i dX_j$:

$$\begin{aligned} dX_i dX_j &= (f_i\ d_t + \sum g_{ik}\ dW_t^k)(f_j\ dt + \sum g_{jk}\ dW_t^k) = \\ &= \sum g_{ik} g_{jl}\ dW_t^k\ dW_t^l = \sum g_{ik} g_{jk}\ (dW_t^k)^2 = \\ &= \sum g_{ik} g_{jk}\ dt = (g.^t g)\ dt \end{aligned}$$

si arriva alla formula di Ito.

□

Facciamo ora un esempio di utilizzo della formula di Ito. Prendiamo i processi di Ito $(X_t)_t$ e $(Y_t)_t$:

$$\begin{aligned} &dX_t = f_t\ dt + g_t\ dW_t \\ &dY_t = \tilde{f}_t\ dt + \tilde{g}_t\ dW_t \end{aligned}$$

e controlliamo se esiste e qual é il differenziale stocastico di $(X_t.Y_t)_t$. Applichiamo la formula di Ito ai due processi $(X_t^2)_t$ e $(Y_t^2)_t$:

$$\begin{aligned} dX_t^2 &= (2X_t f_t + g_t^2)\ dt + 2X_t g_t\ dW_t \\ dY_t^2 &= (2Y_t \tilde{f}_t + \tilde{g}_t^2)\ dt + 2Y_t \tilde{g}_t\ dW_t \\ d(X_t + Y_t)^2 &= (2(X_t + Y_t)(f_t + \tilde{f}_t) + (g_t + \tilde{g}_t)^2)\ dt + \\ &+ 2(X_t + Y_t)(g_t + \tilde{g}_t)\ dW_t \end{aligned}$$

Sottraendo la prima e la seconda riga dalla terza abbiamo:

$$2d(X_t.Y_t) = (2X_t \tilde{f}_t + 2Y_t f_t + 2g_t \tilde{g}_t)\ dt + 2(X_t \tilde{g}_t + Y_t g_t)\ dW_t$$

$$2d(X_t.Y_t) = (2X_t \tilde{f}_t + 2Y_t f_t + 2g_t \tilde{g}_t)\ dt + 2(X_t \tilde{g}_t + Y_t g_t)\ dW_t$$

che, in una scrittura piu' compatta ed espressiva, diventa:

$$d(X_t.Y_t) = X_t\ dY_t + Y_t\ dX_t + g_t \tilde{g}_t\ dW_t$$

Da questo esempio, oltre a ricavare una regola per la moltiplicazione che ci sará molto utile, apprendiamo anche che la classe dei processi di Ito é un'algebra.

Vediamo un altro esempio di uso della formula di Ito. Prendiamo il processo:

$$Z_t^\lambda = \lambda \int_0^t X_s\ dW_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t X_s^2\ ds$$

con $X_s \in \Lambda^1$; allora Z_t^λ ha il differenziale stocastico:

$$dZ_t^\lambda = -\frac{\lambda^2}{2} X_t^2 \; dt + \lambda X_t \; dW_t$$

vogliamo vedere che differenziale stocastico ha il processo:

$$Y_t = e^{Z_t^\lambda} = \exp\left(\lambda \int_0^t X_s \; dW_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t X_s^2 \; ds\right)$$

Poiché $e^{\cdot} \in C_b^2$, applichiamo la formula di Ito:

$$\begin{aligned} dY_t &= \left(e^{Z_t^\lambda}\left(-\frac{\lambda^2}{2} X_t^2\right) + \frac{\lambda^2}{2} e^{Z_t^\lambda} \lambda X_t^2\right) \; dt + e^{Z_t^\lambda} \lambda X_t \; dW_t = \\ &= e^{Z_t^\lambda} \lambda X_t \; dW_t = Y_t \lambda X_t \; dW_t \end{aligned}$$

da questa equazione ricaviamo che $(Y_t)_t$ é una martingala locale e, siccome $Y_t > 0 \; \forall t$, abbiamo che $(Y_t)_t$ é una supermartingala. Stabiliamo ora un lemma che ci sará utile in seguito.

Lemma 4.5 *: se $(X_t)_t \in M^2$, e $\int_0^T X_s^2 \; ds \leq kT$ per un certo $k > 0$, allora vale la seguente disuguaglianza, chiamata* **disuguaglianza esponenziale***:*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^T X_s \; dW_s \right| \geq c\right\} \leq 4 e^{-\frac{c^2}{2kT}}$$

Dimostrazione: poniamo $M_t = \int_0^t X_s \; dW_s$, e $A_t = \int_0^t X_s^2 \; ds$; allora $\forall \theta > 0$ abbiamo:

$$\{M_t \geq c\} = \{e^{\theta M_t} \geq e^{\theta c}\} \subseteq \left\{e^{\theta M_t - \frac{\theta^2}{2} A_t} \geq e^{\theta c - \frac{\theta^2}{2} kT}\right\}$$

applicando la disuguaglianza massimale alla supermartingala $(e^{\theta M_t - \frac{\theta^2}{2} A_t})_t$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} M_t \geq c\right\} &\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\theta M_t - \frac{\theta^2}{2} A_t} \geq e^{\theta c - \frac{\theta^2}{2} kT}\right\} \leq \\ &\leq e^{-\theta c + \frac{\theta^2}{2} kT}\left(E\left[e^{\theta M_0 - \frac{\theta^2}{2} A_0}\right] + E\left[e^{\theta M_T - \frac{\theta^2}{2} A_T}\right]\right) \leq \\ &\leq 2 e^{-\theta c + \frac{\theta^2}{2} kT} \end{aligned}$$

questo vale $\forall \theta > 0$, quindi anche per $\theta = \frac{c}{kT}$, che minimizza l'ultimo membro. Allora abbiamo:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} M_t \geq c\right\} \leq 2 e^{-\frac{c^2}{2kT}}$$

Con lo stesso ragionamento, applicato a $(-M_t)_t$, si prova che:

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{0\le t\le T} M_s \le -c\right\} \le 2e^{-\frac{c^2}{2kT}}$$

da queste due disuguaglianze segue la tesi.

$\square$

4.3 Il teorema di Girsanov

Supponiamo di avere il processo $(X_t)_t$ dotato di differenziale stocastico:

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t$$

Ci chiediamo se puó esistere una misura di probabilitá $\tilde{\mathbf{P}}$ tale che $(X_t)_t$ sia una $\tilde{\mathbf{P}}$-martingala.

Piú precisamente, diciamo che $\tilde{\mathbf{P}}$ é una **misura di martingala equivalente** a $\mathbf{P}$ rispetto al processo $(X_t)_t$ se:
- $\tilde{\mathbf{P}}$ é equivalente a $\mathbf{P}$
- $(X_t)_t$ é una $\tilde{\mathbf{P}}$-martingala

Il modo classico per risolvere questo problema é quello di scrivere il processo $(X_t)_t$ nella forma:

$$dX_t = \sigma_t d\tilde{W}_t$$

(che chiaramente andrá intesa nel senso integrale), dove $(\tilde{W}_t)_t$ é un opportuno processo. Se $\sigma_t \neq 0$ $\forall t$ q. c., e $(\sigma_t^{-1} b_t)_t \in \Lambda_W^1$, allora un possibile candidato per questo puó essere il processo $(\tilde{W}_t)_t$ cosí definito:

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \sigma_s^{-1} b_s \; ds$$

Tuttavia c'é il problema di stabilire che significato dare ad una espressione del tipo $\int_0^t g_t \; d\tilde{W}_t$. Scopriremo che il processo $(\tilde{W}_t)_t$ é un moto browniano, tuttavia non rispetto alla probabilitá $\mathbf{P}$, ma rispetto ad una misura di probabilitá $\tilde{\mathbf{P}}$ equivalente a $\mathbf{P}$.

Prendiamo ora un altro processo $(\phi_t)_t \in M_W^2$, e definiamo il processo $(Z_t)_t$ in questo modo:

$$Z_t = exp\left(\int_0^t \phi_s \; dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\phi_s|^2 \; ds\right)$$

Come abbiamo giá visto, il processo Z_t verifica l'equazione $dZ_t = Z_t \phi_t \; dW_t$.

Proposizione 4.6 *: se $\exists K$ tale che $\int_0^T |\phi_s|\ ds \leq K$, allora $(Z_t)_t$ é una martingala limitata in $L^p\ \forall p$*

Per dimostrare questa proposizione ci servirá il seguente lemma:

Lemma 4.7 *: se $f \in C^1(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ tale che $f(0) = 0$, ed X é una variabile aleatoria reale positiva, allora:*

$$E[f(X)] = \int_0^{+\infty} f'(\rho) P\{X \geq \rho\}\ d\rho$$

Dimostrazione: se chiamo μ la legge di X, applicando il teorema di Fubini al sottoinsieme $\{(\rho, x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ | x \geq \rho\}$ di $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, ho:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f'(\rho)\mathbf{P}\{X \geq \rho\}\ d\rho &= \int_0^{+\infty} f'(\rho) \int_\rho^{+\infty} \mu(dx)\ d\rho = \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^x f'(\rho)\ d\rho\ \mu(dx) = \int_0^{+\infty} [f(\rho)]_0^x\ \mu(dx) = \\
&= \int_0^{+\infty} f(x)\ \mu(dx) = E[f(X)]
\end{aligned}$$

□

Passiamo ora alla dimostrazione della proposizione

Dimostrazione: poniamo $Z_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |Z_s|$; allora abbiamoo che:

$$\int_0^T |\phi_s|^2 |Z_s|^2\ ds \leq K Z_T^{*2}$$

quindi, se $Z_T^* \in L^2(\Omega)$, allora $(\phi_t Z_t)_t \in M^2$, e quindi, poiché $dZ_t = Z_t \phi_t\ dW_t$, allora $(Z_t)_t$ é una martingala limitata in $L^2(\Omega)$. Prendiamo ora $\rho > 0$; allora, per la disuguaglianza esponenziale:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{Z_T^* \geq \rho\} &\leq \mathbf{P}\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \exp\left(\int_0^t \phi_s\ dW_s \right) \geq \rho \right\} = \\
&= \mathbf{P}\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \phi_s\ dW_s \geq \log(\rho) \right\} \leq 4 \exp\left(-\frac{(\log \rho)^2}{2K} \right)
\end{aligned}$$

allora, per $\rho \to +\infty$, $\mathbf{P}\{Z_T^* \geq \rho\} \to 0$ piú velocemente di qualsiasi polinomio. Usando il lemma sulla funzione $\rho \to \rho^p$, ricaviamo che:

$$E[Z_T^{*p}] = \int_0^{+\infty} p\rho^{p-1} \mathbf{P}\{Z_T^* \geq \rho\}\ d\rho < +\infty\ \forall p \geq 1$$

e quindi $(Z_t)_t$ é una martingala ed é limitata in $L^p\ \forall p \geq 1$.

□

Abbiamo allora che $E[Z_t] = E[Z_0] = 1 \ \forall t \in [0,T]$; siccome $Z_t > 0 \ \forall t$, possiamo definire la misura di probabilitá $d\tilde{\mathbf{P}} = Z_T.d\mathbf{P}$ equivalente a $\mathbf{P}$. Da ora in poi indichiamo con $E_{\mathbf{P}}[.]$ la speranza calcolata rispetto a $\mathbf{P}$, e con $E_{\tilde{\mathbf{P}}}[.]$ la speranza calcolata rispetto a $\tilde{\mathbf{P}}$.

Il seguente teorema é noto come **teorema di Girsanov**.

Teorema 4.8 *: supponiamo che $(\phi_t)_t \in \Lambda^2_W$, e che il processo $(Z_t)_t$ definito sopra sia una martingala. Allora il processo*

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \phi_s \ ds$$

é un moto browniano rispetto a $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P}, (\mathcal{F}_t)_t)$

Per una dimostrazione vedere Baldi[1], pagg. 176 - 178.

□

Allora, possiamo definire l'integrale stocastico rispetto al processo $(\tilde{W}_t)_t$ in modo analogo a quanto fatto con $(W_t)_t$. Notiamo innanzitutto che $\Lambda^p_W = \Lambda^p_{\tilde{W}} \ \forall p \geq 1$, poiché $\mathbf{P}$ é equivalente a $\tilde{\mathbf{P}}$; tuttavia, $M^p_W \neq M^p_{\tilde{W}}$. Vediamo ora che legami hanno i due integrali stocastici:

Lemma 4.9 *: se $(Y_t)_t \in \Lambda^2_W$, allora:*

$$\int_0^t Y_s \ d\tilde{W}_s = \int_0^t Y_s \ dW_s - \int_0^t Y_s \phi_s \ ds$$

Dimostrazione: supponiamo che Y sia un processo elementare $Y_t = \sum Y_{t_i} \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i]}$; allora:

$$\begin{aligned} \int_0^t Y_s \ d\tilde{W}_s &= \sum Y_{t_i}(\tilde{W}_{t_{i-1}} - \tilde{W}_{t_i}) = \sum Y_{t_i}(W_{t_{i-1}} - W_{t_i}) - \sum Y_{t_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi_s \ ds \\ &= \int_0^t Y_s \ dW_s - \int_0^t Y_s \phi_s \ ds \end{aligned}$$

Se prendiamo un generico processo $(Y_t)_t \in \Lambda^2_W$ e lo approssimiamo con processi elementari, allora per ognuno di questi processi vale l'uguaglianza di sopra; al tendere della successione ad $(Y_t)_t$, il primo membro tende a $\int_0^t Y_s \ d\tilde{W}_s$ in probabilitá rispetto a $\tilde{\mathbf{P}}$, il primo integrale al secondo membro tende a $\int_0^t Y_s \ dW_s$ in probabilitá rispetto a $\mathbf{P}$; siccome sia $(Y_t)_t$ che $(\phi_t)_t$ sono in Λ^2_W, e la convergenza in probabilitá $\mathbf{P}$ é equivalente a quella in $\tilde{\mathbf{P}}$, (perché $\mathbf{P}$ e $\tilde{\mathbf{P}}$ sono equivalenti), allora $(Y_t.\phi_t)_t \in \Lambda^1_W$, e quindi l'ultimo integrale tende a $\int_0^t Y_s \phi_s \ ds$.

□

Il seguente corollario risolve allora il problema che ci eravamo posti all'inizio:

Corollario 4.10 *: se abbiamo il processo* $(X_t)_t$ *tale che* $dX_t = b_t\ dt + \sigma_t\ dW_t$*, con* $(b_t)_t \in \Lambda^1_W([0,T];\mathbf{R}^n)$*,* $(\sigma_t)_t \in \Lambda^2_W([0,T];\mathbf{R}^{n\times n})$*,* σ_t *invertibile* $\forall t$ *q. ov. e tali che* $\int_0^T \sigma_t^{-1} b_t\ dt \leq K$ *per un* $K \in \mathbf{R}$ *fissato, allora:*

$$dX_t = \sigma_t\ d\tilde{W}_t$$

se inoltre $(\sigma_t)_t \in M^2_{\tilde{W}}$*, allora* $\tilde{\mathbf{P}}$ *é una misura equivalente di martingala per il processo* $(X_t)_t$ *con densitá* $Z_T \in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$

Dimostrazione: basta porre $\phi_t = -\sigma_t^{-1} b_t$, e calcolare:

$$\int_0^t \sigma_s\ d\tilde{W}_s = \int_0^t \sigma_s\ dW_s + \int_0^t \sigma_s \sigma_s^{-1} b_s\ ds = \int_0^t \sigma_s\ dW_s + \int_0^t b_s\ ds$$

Poiché $(\tilde{W}_t)_t$ é un $\tilde{\mathbf{P}}-$moto browniano, allora il processo $(X_t)_t$ é una $\tilde{\mathbf{P}}$-martingala locale; se poi $(\sigma_t)_t \in M^2_{\tilde{W}}$, allora $(X_t)_t$ é una martingala, e $\tilde{\mathbf{P}}$ é equivalente a $\mathbf{P}$ con densitá $Z_T \in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})\ \forall p$, quindi $Z_T \in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$, e segue la tesi.

□

4.4 Teorema di rappresentazione delle martingale

Abbiamo visto, nella parte dedicata all'integrale di Ito, che, se $(X_t)_t \in M^2_W([0,T])$, allora il processo $(\int_0^t X_u\ dW_u)_t$ é una martingala continua, adattata ad $(\mathcal{F}_t)_t$ ed appartenente ad $M^2_W([0,T])$. Vogliamo ora mostrare il viceversa, cioé che ogni martingala $(M_t)_t \in M^2_W([0,T])$ adattata a $(\mathcal{F}_t)_t$ puó essere rappresentata come integrale stocastico di un opportuno processo $(X_t)_t$. Questo risultato é noto come **teorema di rappresentazione delle martingale**.

Teorema 4.11 *: se* $(W_t)_t$ *é un moto browniano m-dimensionale e* $(M_t)_t$ *é una martingala appartenente ad* $M^2_W([0,T])$ *e adattata a* $(\mathcal{F}_t)_t$*, allora* $\exists (X_t)_t \in M^2_W([0,T])$ *tale che:*

$$M_t = E[M_0] + \int_0^t X_u\ dW_u$$

e, in particolare, $(M_t)_t$ *ammette una versione continua.*

Dimostrazione: La dimostrazione si articolerá in quattro passi.

1) definiamo il sottospazio vettoriale di $L^2(\Omega,\mathcal{F}_T,\mathbf{P})$:

$$H = \left\{ Z = c + \int_0^T X_u\ dW_u \,\middle|\, c \in \mathbf{R}, (X_t)_t \in M^2_W([0,T]) \right\}$$

e dimostriamo che é chiuso in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$.

Supponiamo di avere una successione $(Z^{(n)})_n = c_n + \int_0^t X_u^{(n)} \, dW_u$ di variabili aleatorie in H, che convergono a $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$. Allora:

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \lim_{n \to \infty} E[Z^{(n)}] = E[Z]$$

Chiamiamo $E[Z] = c$; allora la successione $Z^{(n)} - c_n = \int_0^T X_u^{(n)} \, dW_u$ tende a $Z - c$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$, quindi é di Cauchy; ricordiamo peró che:

$$\left\| \int_0^T X_u^{(n)} \, dW_u - \int_0^T X_u^{(l)} \, dW_u \right\|_{L^2} = \|X^{(n)} - X^{(l)}\|_{M_W^2([0,t])}$$

quindi la successione di processi $(X^{(n)})_n$ é di Cauchy in M^2, che é completo; allora $\exists X \in M^2$ tale che $X^{(n)} \to X$ in M^2; poiché l'integrale stocastico é una isometria, $\int_0^T X_u^{(n)} \, dW_u \to \int_0^t X_u \, dW_u$ in L^2, e quindi $Z = c + \int_0^T X_u \, dW_u$.

2) costruiamo il sottoinsieme di $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$:

$$K = \left\{ Z \;\middle|\; Z = \exp\left(c + \int_0^T \rho_u \, dW_u \right), c \in \mathbf{R}, \rho \in L^2([0,T]; \mathbf{R}^m) \right\}$$

e dimostriamo che é contenuto in H. Per fare questo costruiamo il processo:

$$\begin{aligned} Z_t &= \exp\left(c + \int_0^t \rho_u \, dW_u + \frac{1}{2} \int_0^T |\rho_u|^2 \, du - \frac{1}{2} \int_0^t |\rho_u|^2 \, du \right) = \\ &= \exp\left(c + \frac{1}{2} \int_0^T |\rho_u|^2 \, du \right) . \exp\left(\int_0^t \rho_u \, dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t |\rho_u|^2 \, du \right) \end{aligned}$$

Notiamo che il primo esponenziale é un numero reale, mentre il secondo ha un differenziale stocastico giá noto; allora ho:

$$dZ_t = Z_t \rho_t \, dW_t$$

Notiamo che, per come abbiamo definito il processo, $Z_T = \exp\left(c + \int_0^T \rho_u \, dW_u \right)$ é il generico elemento di K. Controlliamo ora che Z_T appartiene ad H:

$$Z_T = Z_0 + \int_0^T Z_u \rho_u \, dW_u = e^c + \int_0^T Z_u \rho_u \, dW_u$$

Z_T appartiene ad H se e solo se $(Z_t \rho_t)_t$ appartiene ad M^2; tuttavia, siccome $\rho_u \in L^2([0,T]; \mathbf{R}^m)$, allora $\int_0^T \|\rho_u\| \, du \leq \|\rho\|_{L^2}$, ed é quindi verificata l'ipotesi della proposizione (4.6); allora $(Z_t \rho_t)_t \in M^2$, e la tesi é verificata.

3) dimostriamo che K é denso in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$; poiché H contiene K ed é chiuso, da questo segue subito che $H = L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$.

Supponiamo che K non sia denso in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$; allora prendiamo $X \in \overline{K}^\perp$; allora X é ortogonale ad ogni variabile aleatoria del tipo

$$e^{\lambda_1 W_{t_1}^{(i_1)} + \ldots + \lambda_n W_{t_n}^{(i_n)}}$$

infatti, basta prendere un $\rho \in L^2([0,T]; \mathbf{R}^m)$ opportuno tale che

$$e^{\lambda_1 W_{t_1}^{(i_1)} + \ldots + \lambda_n W_{t_n}^{(i_n)}} = e^{<\lambda, Z>}, \text{ con } Z = \int_0^T \rho_u \, dW_u$$

Allora, per il criterio di misurabilitá di Doob, $\exists g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ misurabile e limitata tale che:

$$0 = E[X e^{<\lambda, Z>}] = E[e^{<\lambda, Z>} E[X|Z]] = E[e^{<\lambda, Z>} g(Z)]$$

Allora, se γ é la densitá di Z su $\mathbf{R}$ rispetto alla misura di Lebesgue, la funzione $g.\gamma$ ha trasformata di Laplace nulla, quindi é nulla, e quindi g é nulla. Ció significa che $E[X|W_{t_1}^{(i_1)}, \ldots, W_{t_n}^{(i_n)}] = 0$, e quindi $E[X|\mathcal{F}_T] = X = 0$. e che quindi $\overline{K}^\perp = L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$.

4) se $(M_t)_t$ é una martingala appartenente ad M_W^2, allora, siccome $M_T \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$, possiamo trovare un processo $(X_t)_t \in M_W^2$ tale che:

$$M_T = E[M_T] + \int_0^T X_u \, dW_u$$

allora, siccome $(M_t)_t$ é una martingala, abbiamo:

$$\begin{aligned} M_t &= E[M_T|\mathcal{F}_t] = E[M_T] + E[\int_0^T X_u \, dW_u|\mathcal{F}_t] = \\ &= E[M_T] + E[\int_0^t X_u \, dW_u|\mathcal{F}_t] + E[\int_t^T X_u \, dW_u|\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

siccome il primo integrale é $\mathcal{F}_t$-misurabile, ed il secondo dipende solo dagli incrementi del moto browniano dopo t, e quindi é indipendente da $\mathcal{F}_t$, si arriva all'espressione:

$$M_t = E[M_T] + \int_0^t X_u \, dW_u$$

in particolare, esiste sempre una versione di $(M_t)_t$ a traiettorie continue.

$\square$