Capitolo 5

Equazioni differenziali stocastiche

Se abbiamo le applicazioni $b : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^n$ e $\sigma : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^{n\times n}$ misurabili, dico che $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), (X_t, W_t, \mathcal{F}_t)_t$ é soluzione dell'**equazione differenziale stocastica**:

$$dX_t = b(X_t, t)\ dt + \sigma(X_t, t)\ dW_t \tag{5.1}$$

se sono verificate le seguenti condizioni:

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ é uno spazio probabilizzato dotato della filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$, $(W_t)_t$ é un moto browniano standard e $(X_t)_t$ é un processo a valori in $\mathbf{R}^n$, entrambi adattati alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$.

- $(b(X_t, t))_t$ é un processo appartenente a Λ^1_W

- $(\sigma(X_t, t))_t$ é un processo appartenente a Λ^2_W

- il processo $(X_t)_t$ soddisfa la seguente equazione:

$$X_t = X_s + \int_s^t b(X_u, u)\ du + \int_s^t \sigma(X_u, u)\ dW_u$$

b si chiama allora coefficiente (funzione) di **drift**, mentre σ si chiama coefficiente (matrice, funzione) di **diffusione**.

C'é peró un altro concetto di soluzione di un'equazione differenziale stocastica, che é quello di soluzione forte. Diciamo che l'equazione differenziale stocastica (*) ha una **soluzione forte** se, per ogni moto browniano standard assegnato $(W_t)_t$, esiste un processo $(X_t)_t$ tale che $(X_t, W_t, \mathcal{F}_t)_t$ sia soluzione dell'equazione (*).

Data una generica soluzione $(X_t, W_t, \mathcal{F}_t)_t$, l'applicazione $t \to X_t(\omega)$ é continua $\mathbf{P}$-q. c., e definisce una applicazione misurabile $X : \Omega \to C^0([0, T], \mathbf{R}^n)$ in questo modo:

$\omega \to X_.(\omega)$

Diremo che per l'equazione (*) c'é **unicitá per traiettorie** se, date due soluzioni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), ((X_t^i)_t, (W_t)_t, (\mathcal{F}_t)_t)$, $i = 1, 2$, abbiamo che $\mathbf{P}\{X_t^1 = X_t^2 \ \forall t \in [s, T]\} = 1$.

5.1 Teorema di esistenza e unicitá

Diamo ora un teorema di esistenza ed unicitá in ipotesi classiche, che nella dimostrazione usa un metodo di punto fisso. Ricordiamo che esistono teoremi di esistenza e teoremi di unicitá in ipotesi molto piú deboli e la cui dimostrazione segue altre idee, come ad esempio risultati di compattezza debole e di equivalenza tra l'esistenza di una soluzione ed il fatto che un opportuno processo sia una martingala locale (vedere ad esempio Ikeda-Watanabe [1], pagg. 173 - 177 per un teorema di esistenza).

Diremo che le funzioni b e σ verificano l'**ipotesi** (A) se:

– $b : \mathbf{R}^n \times [0, T] \to \mathbf{R}^n$ e $\sigma : \mathbf{R}^n \times [0, T] \to \mathbf{R}^{n \times n}$ sono misurabili

– $\exists K > 0, M > 0$ tali che $\forall x, y \in \mathbf{R}^n, t \in [0, T]$ si ha:

$$\|b(x,t)\|^2 + \|\sigma(x,t)\|^2 \leq M^2(1 + \|x\|^2)$$
$$\|b(x,t) - b(y,t)\| + \|\sigma(x,t) - \sigma(y,t)\| \leq K\|x - y\|$$

Prima di iniziare il teorema vero e proprio, ci serve un lemma:

Lemma 5.1 *: se $F \in L_p^\infty([0,T])$ e definiamo $G_t = \int_0^t F_s \, dW_s$, allora $(G_t)_t \in C_p([0,T])$, e:*

$$\|G\|^2_{C_p([0,T])} \leq T\|F\|^2_{L_p^\infty([0,T])}$$

Dimostrazione: $(G_t)_t \in C_p([0,T])$ per quanto visto sul differenziale stocastico; ne calcolo ora la norma, ricordando che l'integrale stocastico e' una isometria da $M^2([0,t])$ in $L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|G\|^2_{C_p([0,T])} &= \sup_t \|G_t\|^2_{L^2(\Omega)} = \sup_t \|F\|^2_{M^2([0,t])} \leq \\ &\leq \sup_t t\|F\|_{C_p([0,t])} = T\|F\|^2_{C_p([0,T])} \end{aligned}$$

e abbiamo la tesi.

□

Teorema 5.2 *: se vale l'ipotesi (A), allora, dati $s \in [0,T)$ e $X_s \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, P; \mathbf{R}^n)$, esiste una soluzione forte $(X_t)_t$ di (5.1) nello spazio $C_p([0,T])$, ed é unica in traiettorie.*

Dimostrazione: costruiamo l'applicazione $\gamma : C_p([0,T]) \to C_p([0,T])$ data da:

$$\gamma(X)(t) = X_s + \int_s^t b(X_u, u)du + \int_s^t \sigma(X_u, u)dW_u$$

Notiamo che $X \in C_p([0,T])$ implica $b(X_.,.), \sigma(X_.,.) \in L_p^\infty([0,T])$, grazie alle ipotesi di misurabilitá e di crescita lineare di b e σ; da questo segue che $\gamma(X) \in C_p([0,T])$.

Il problema di trovare una soluzione a (5.1) é equivalente a quello di trovare un punto fisso per γ nello spazio $C_p([0,T])$. Tentiamo di calcolare la norma di γ; se abbiamo $X, Y \in C_p([0.T])$, ed indichiamo la norma in $C_p([0,T])$ con $\|.\|_T$, allora:

$$\begin{aligned}
\|\gamma(X)(t) \quad - \quad \gamma(Y)(t)\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \int_s^t (b(X_u,u) - b(Y_u,u))\, du + \int_s^t (\sigma(X_u,u) - \sigma(Y_u,u))\, dW_u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \\
&\leq \left\| \int_s^t (b(X_u,u) - b(Y_u,u))\, du \right\|_{L^2(\Omega)} + \\
&\quad + \left\| \int_s^t (\sigma(X_u,u) - \sigma(Y_u,u))\, dW_u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \\
&\leq \int_s^t \|b(X_u,u) - b(Y_u,u)\|_{L^2(\Omega)}\, du + \\
&\quad + \left(\int_s^t \|\sigma(X_u,u) - \sigma(Y_u,u)\|_{L^2(\Omega)}\, dW_u \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \int_s^t K\|X_u - Y_u\|_{L^2(\Omega)}\, du + \left(\int_s^t K^2 \|X_u - Y_u\|^2_{L^2(\Omega)}\, du \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&\leq \int_s^t K\|X - Y\|_T\, du + \left(\int_s^t K^2 \|X - Y\|^2_T\, du \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= (t-s)K\|X-Y\|_T + ((t-s)K^2\|X-Y\|_T^2)^{\frac{1}{2}} = \\
&= K(t - s + \sqrt{t-s})\|X - Y\|_T
\end{aligned}$$

Allora $\|\gamma(X) - \gamma(Y)(.)\|_T \leq K(T - s + \sqrt{T-s})\|X - Y\|_T$, e quindi:

$$\|\gamma\|_{C_p([0,T])} \leq K(T - s + \sqrt{T-s})$$

Ora, se $K(T - s + \sqrt{T-s}) < 1$, allora γ é una contrazione in $C_p([0,T])$, quindi ha un unico punto fisso X che, per quanto detto prima, é soluzione di (5.1).

Se invece $K(T - s + \sqrt{T-s}) \geq 1$, basta definire γ sullo spazio $C_p([s, T_0])$ per un opportuno T_0 tale che $K(T_0 - s + \sqrt{T_0 - s}) < 1$, e costruire la soluzione di (5.1) in $[s, T_0]$; dopodiché si ripete il ragionamento con istante iniziale T_0 e condizione iniziale X_{T_0}; siccome la costante di Lipschitz K di b e σ non dipende da t, cosí facendo, in un numero finito di passi si arriva a coprire tutto $[s,T]$, e ad avere quindi la soluzione.

Non abbiamo tuttavia dimostrato l'unicitá in traiettorie; per questo, supponiamo di avere due processi $(X_t)_t$ e $(Y_t)_t$ che soddisfino l'equazione; allora:

$$\begin{aligned}
\|X_t - Y_t\|^2 &\leq 2\left\| \int_s^t (b(X_u,u) - b(Y_u,u))\, du \right\| + \left\| \int_s^t (\sigma(X_u,u) - \sigma(Y_u,u))\, dW_u \right\| \leq \\
&\leq 2(t-s)\int_s^t \|b(X_u,u) - b(Y_u,u)\|^2\, du + 2\left\| \int_s^t (\sigma(X_u,u) - \sigma(Y_u,u))\, dW_u \right\|
\end{aligned}$$

usando la disuguaglianza di Doob abbiamo:

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{s\le t\le T}\|X_t-Y_t\|^2\right] &\le E\left[2(T-s)\int_s^T \|b(X_u,u)-b(Y_u,u)\|^2\,du\right]+\\
&\quad +2E\left[\sup_{s\le t\le T}\left\|\int_s^t(\sigma(X_u,u)-\sigma(Y_u,u))\,dW_u\right\|\right]\le\\
&\le 2(T-s)K^2\int_s^T E[\|X_t-Y_t\|^2]\,du+\\
&\quad +8E\left[\int_s^T\|\sigma(X_u,u)-\sigma(Y_u,u)\|^2\,du\right]\le\\
&\le 2(T-s)K^2\int_s^T E[\|X_t-Y_t\|^2]\,du+8K^2\int_s^T E[\|X_t-Y_t\|^2]\,du
\end{aligned}
$$

Ricordando peró che $\|X-Y\|_T=0$ significa che $E[\|X_t-Y_t\|^2]=0\ \forall t\in[s,T]$, otteniamo che:

$$
E\left[\sup_{s\le t\le T}\|X_t-Y_t\|^2\right]=0
$$

e ció significa che le traiettorie di $(X_t)_t$ e di $(Y_t)_t$ sono uguali; abbiamo dunque dimostrato l'unicitá in traiettorie.

□

5.2 Dipendenza dal dato iniziale

Ci preoccupiamo ora di dare una stima della soluzione dell'equazione (*) in dipendenza del dato iniziale X_s.

Ricordiamo il seguente risultato classico, noto nella letteratura come **lemma di Gromwall**:

Lemma 5.3 *: se $u\in L^1([a,b]), v\in L^{\inf}([a,b]), u,v\ge 0, c\in\mathbf{R}$ e:*

$$
v(t)\le c+\int_a^t u(s)v(s)\ ds
$$

allora:

$$
v(t)\le c.\exp(\int_a^t u(s)\ ds)
$$

□

Ricordiamo inoltre la seguente disuguaglianza algebrica, di cui verrá fatto grande uso nel seguito:

$$
(x_1+...+x_n)^2\le nx_1^2+...+nx_n^2
$$

Lemma 5.4 *: se l'equazione (5.1) soddisfa le ipotesi (A), allora vale la seguente maggiorazione:*

$$\|X_t\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 3(\|X_s\|^2_{L^2(\Omega)} + M^2(T-s)(T-s+1)e^{M^2(t-s)(T-s+1)}$$

Dimostrazione: ricordando il significato integrale della (5.1) abbiamo:

$$\begin{aligned}
\|X_t\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 3\|X_s\|^2_{L^2(\Omega)} + +3\left\|\int_s^t b(u,X_u)\ du\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \\
&\quad +3\left\|\int_s^t \sigma(u,X_u)\ dW_u\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \\
&\leq 3\|X_s\|^2_{L^2} + 3\int_\Omega \left\|\int_s^t b(u,X_u)\ du\right\|^2\ d\mathbf{P} + 3\int_s^t \|\sigma(u,X_u)\|^2_{L^2}\ du \leq \\
&\leq 3(t-s)\|X_s\|^2_{L^2} + 3\int_s^t\int_\Omega |b(u,X_u)|^2\ d\mathbf{P}\ du + \\
&\quad +3\int_s^t\int_\Omega |\sigma(u,X_u)|^2\ d\mathbf{P}\ du \leq \\
&\leq 3\|X_s\|^2_{L^2} + 3(t-s)\int_s^t M^2(1+\|X_u\|^2_{L^2})\ du + \\
&\quad +3\int_s^t M^2(1+\|X_u\|^2_{L^2})\ du \leq \\
&\leq 3\|X_s\|^2_{L^2} + 3(T-s+1)M^2\left(T-s+\int_s^t \|X_u\|^2_{L^2}\ du\right)
\end{aligned}$$

per il lemma di Gromwall applicata alla funzione $t \to \|X_t\|^2_{L^2(\Omega)}$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
\|X_t\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq (3\|X_s\|^2_{L^2(\Omega)} + 3(T-s+1)M^2(T-s))\ e^{\int_s^t 3(T-s+1)M^2\ du} = \\
&= (3\|X_s\|^2_{L^2(\Omega)} + 3(T-s+1)M^2(T-s))\ e^{3(T-s+1)M^2(t-s)}
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 5.5 *: se l'equazione (5.1) soddisfa le ipotesi (A), allora vale la seguente maggiorazione:*

$$\begin{aligned}
\|X_t - X_s\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 2M^2(T-s+1). \\
&\quad .\Big((t-s) + 3(\|X_s\|^2_{L^2} + M^2(T-s)(T-s+1))(e^{M^2(T-s+1)(t-s)}-1)\Big)
\end{aligned}$$

Dimostrazione: da calcoli analoghi a quelli del lemma si ha:

$$\begin{aligned}
\|X_t &- X_s\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2\left\|\int_s^t b(u,X_u)\ du\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\left\|\int_s^t \sigma(u,X_u)\ dW_u\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \\
&\leq 2M^2\left((t-s)\int_s^t (1+\|X_u\|^2_{L^2})\ du + 2\int_s^t (1+\|X_u\|^2_{L^2})\ du\right) \leq
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq\ 2(T-s+1)M^2\left((t-s)+\int_s^t \|X_u\|_{L^2}^2\ du\right)\leq\\
&\leq\ 2(T-s+1)M^2.\\
&\quad .\left((t-s)+3\int_s^t (\|X_s\|_{L^2}^2+M^2(T-s)(T-s+1))\ e^{M^2(u-s)(T-s+1)}\ du\right)=\\
&=\ 2M^2(T-s+1).\\
&\quad .\Big((t-s)+3(\|X_s\|_{L^2}^2+M^2(T-s)(T-s+1))(e^{M^2(T-s+1)(t-s)}-1)\Big)
\end{aligned}
$$

□

5.3 Equazioni lineari

Trattiamo ora il caso in cui l'equazione stocastica é unidimensionale e della forma:

$$
\begin{cases} dX_t = b_t X_t\ dt + \sigma_t X_t\ dW_t \\ X_s = X \end{cases} \tag{5.2}
$$

con $b_t \in \Lambda_W^1, \sigma_t \in \Lambda_W^2$ e $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbf{P})$. Osserviamo che non siamo piú nelle ipotesi (A), sia perché non abbiamo piú dei coefficienti descritti solo da funzioni deteriministiche, sia perché non imponiamo condizioni su b o su σ che implichino la lipschitzianitá o la crescita sublineare del drift e della diffusione; tuttavia, nel caso di equazioni lineari scalari, possiamo addirittura trovare una soluzione esplicita.

Ricordiamo che la soluzione dell'equazione differenziale ordinaria:

$$
\begin{cases} \dot{x}(t) = b(t)x(t) \\ x(s) = x \end{cases}
$$

é: $x(t) = x.\exp\left(\int_s^t b(u)\ du\right)$; possiamo quindi cercare una soluzione di (5.2) di questa forma.

Cerchiamo il differenziale stocastico del processo $(\log X_t)_t$, supponendo che $X_t > 0\ \forall t$ q.c.:

$$
\begin{aligned}
d(\log X_t) &= \left(\frac{1}{X_t}b_t X_t - \frac{1}{2X_t^2}\sigma_t X_t\right)\ dt + \frac{1}{X_t}\sigma_t X_t\ dW_t = \\
&= \left(b_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)\ dt + \sigma_t\ dW_t
\end{aligned}
$$

cioé:

$$
\log X_t = \log X_s + \int_s^t \left(b_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right)\ du + \int_s^t \sigma_u\ dW_u
$$

e infine:

$$
X_t = X.\exp\left(\int_s^t \left(b_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right)\ du + \int_s^t \sigma_u\ dW_u\right) \tag{5.3}
$$

Abbiamo quindi una traccia di cosa puó essere la soluzione. Verifichiamo che il processo $(X_t)_t$ é soluzione per ogni condizione iniziale $X \in L^2)$; consideriamo il processo

$$Y_t = \int_s^t \left(b_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right)\ du + \int_s^t \sigma_u\ dW_u$$

che ha il differenziale stocastico:

$$dY_t = \left(b_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)\ dt + \sigma_t\ dW_t$$

dalla formula di Ito applicata alla funzione $y \to e^y$ ottengo:

$$d(e^{Y_t}) = \left(e^{Y_t}\left(b_t - \frac{\sigma_t^2}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{Y_t}\sigma_t^2\right)\ dt + e^{Y_t}\sigma_t\ dW_t$$

chiamiamo allora Z il processo definito da $Z_t = e^{Y_t}$, che ha differenziale stocastico:

$$dZ_t = Z_t b_t\ dt + \sigma_t Z_t\ dW_t$$

e prendiamo il processo $\tilde{Z}$ definito da $\tilde{Z}_t = X\ \forall t$, che ha differenziale stocastico uguale a zero. Allora:

$$\begin{aligned} d(XZ_t) &= Z_t\ dX + X\ dZ_t + g_t.0\ dt = \\ &= X\ dZ_t = XZ_t b_t\ dt + XZ_t\sigma_t\ dW_t \end{aligned}$$

Allora il processo $(XZ_t)_t$ soddisfa l'equazione (5.2), e quindi é soluzione.

Notiamo che la soluzione é tale che, se $X(\omega) \neq 0$, allora $X_t(\omega) \neq 0\ \forall t \in [s,T]$; in particolare, la soluzione mantiene lo stesso segno del dato iniziale.

Proviamo ora che la soluzione $(X_t)_t$ costruita sopra é unica nel caso in cui $X \neq 0$ $\mathbf{P}$-q.c.. Supponiamo di avere un'altra soluzione $(\tilde{X}_t)_t$; allora costruiamo il processo $(Z_t)_t$ cosí definito:

$$Z_t = \frac{X_s}{X_t} = \frac{X}{X_t} = \exp\left(-\int_s^t \left(b_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right)\ du - \int_s^t \sigma_u\ dW_u\right)$$

allora:

$$\begin{aligned} dZ_t &= Z_t\left(-b_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)\ dt - Z_t\sigma_t\ dW_t = \\ &= Z_t(-b_t + \sigma_t^2)\ dt - Z_t\sigma_t\ dW_t \end{aligned}$$

e calcoliamo il differenziale stocastico del processo $(\tilde{X}_t Z_t)_t$:

$$\begin{aligned} d(\tilde{X}_t Z_t) &= \tilde{X}_t\ dZ_t + Z_t\ d\tilde{X}_t - Z_t\sigma_t\tilde{X}_t\sigma_t\ dt = \\ &= \tilde{X}_t(Z_t(-b_t + \sigma_t^2)\ dt - Z_t\sigma_t\ dW_t) + Z_t(b_t\tilde{X}_t\ dt + \sigma_t\tilde{X}_t\ dW_t) - Z_t\tilde{X}_t\sigma_t^2\ dt = 0 \end{aligned}$$

allora $\tilde{X}_t Z_t = \tilde{X}_s Z_s \ \forall t$, cioé:

$$\tilde{X}_t \frac{X}{X_t} = \tilde{X}_s \frac{X}{X_s} = X \frac{X}{X} = X \ \forall t$$

cioé $\frac{X}{X_t} = X_t \ \forall t$, e quindi l'unica soluzione é quella esplicita da noi trovata.

Abbiamo provato il

Teorema 5.6 *: l'equazione differenziale stocastica (5.2) ammette come soluzione forte, unica in traiettorie, il processo dato da (5.3), le cui traiettorie mantengono lo stesso segno del dato iniziale.*

□

Si puó provare in modo analogo il:

Teorema 5.7 *un sistema di equazioni del tipo:*

$$\begin{cases} dX_i(t) = X_i(t)b_i(t)\ dt + X_i(t)\sum_j \sigma_{ij}(t)\ dW_j(t) \\ X_i(s) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbf{P}) \qquad\qquad i = 1, ..., k \end{cases} \tag{5.4}$$

con $(b(t))_t \in \Lambda^1_W([0,T]; \mathbf{R}^k)$, $(\sigma(t))_t \in \Lambda^2_W([0,T]; \mathbf{R}^{k\times m})$ e $(W(t))_t$ moto browniano m-dimensionale, ammette un'unica soluzione forte, data da:

$$X_i(t) = X_i(s)\exp\left(\int_s^t \left(b_i(u) - \frac{1}{2}\sum_j \sigma_{ij}(u)^2\right)\ du + \sum_j \int_s^t \sigma_{ij}(u)\ dW_j(u)\right) \tag{5.5}$$

□

5.4 Processo di Ornstein - Uhlenbeck

Si dice **processo di Ornstein - Uhlenbeck** un processo che soddisfa l'equazione:

$$\begin{cases} dX_t = (aX_t + c)\ dt + \sigma dW_t \\ X_s = X \end{cases} \tag{5.6}$$

con $a, c, \sigma \in \mathbf{R}$. Stavolta l'equazione soddisfa le ipotesi (A), quindi esiste una soluzione ed é l'unica in $C_p(0,t)$. Vediamo di trovarla esplicitamente.

Poniamo $Y_t = X_t.f(t)$; allora:

$$\begin{aligned} dY_t &= f(t)\ dX_t + X_t\ d(f(t)) = \\ &= f(t)(aX_t + c)\ dt + f(t)\sigma\ dW_t + X_t f'(t)\ dt \end{aligned}$$

vogliamo eliminare X_t dall'espressione sopra; allora, se scelgo $f(t)$ tale che:

$$\begin{cases} af(t) + f'(t) = 0 \\ f(s) = 1 \end{cases}$$

cioé $f(t) = e^{-a(t-s)}$, allora abbiamo che:

$$dY_t = ce^{-a(t-s)}\ dt + \sigma e^{-a(t-s)}\ dW_t$$

cioé:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_s + \int_s^t ce^{-a(u-s)}\ du + \int_s^t \sigma e^{-a(u-s)}\ dW_u = \\ &= X - \frac{c}{a}\left(e^{-a(t-s)} - 1\right) + \sigma \int_s^t e^{-a(u-s)}\ dW_u \end{aligned}$$

allora la soluzione esplicita é:

$$\begin{aligned} X_t &= e^{a(t-s)}Y_t = \\ &= Xe^{a(t-s)} + \frac{c}{a}\left(e^{a(t-s)} - 1\right) + \sigma e^{at}\int_s^t e^{-au}\ dW_u \end{aligned}$$

Notiamo che $\int_s^t e^{-au}\ dW_u$ é un integrale stocastico di una funzione deterministica, quindi é una variabile aleatoria gaussiana. Allora, se il dato iniziale X é gaussiano, anche la soluzione X_t e' gaussiana $\forall t$, ed inoltre il processo$(X_t)_t$ é gaussiano, e quindi la legge del processo é univocamente determinata dalla sua media e dalla covarianza.

Calcoliamo ora media e covarianza delle soluzioni; prendo $t \in [s, T]$ e v tale che $t \leq v \leq T$; ricordando che un integrale stocastico della forma $\int_s^t f_u\ dW_u$ é una variabile aleatoria centrata ed é indipendente da $\mathcal{F}_s$, e quindi indipendente da X, abbiamo:

$$E[X_t] = e^{a(t-s)}E[X] + \frac{c}{a}(e^{a(t-s)} - 1) \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_v) &= Cov\Big(Xe^{a(t-s)} + \sigma e^{at}\int_s^t e^{-au}\ dW_u, Xe^{a(v-s)} + \\ &\quad + \sigma e^{av}\int_s^v e^{-au}\ dW_u\Big) = \\ &= e^{a(t+v-2s)}Var[X] + \\ &\quad + \sigma^2 e^{a(t+v)}Cov\left(\int_s^t e^{-au}\ dW_u, \int_s^v e^{-au}\ dW_u\right) = \\ &= e^{a(t+v-2s)}Var[X] + \sigma^2 e^{a(t+v)}Var\left[\int_s^t e^{-au}\ dW_u\right] = \\ &= e^{a(t+v-2s)}Var[X] + \sigma^2 e^{a(t+v)}\int_s^t |e^{-au}|^2\ du = \\ &= e^{a(t+v-2s)}Var[X] + \frac{\sigma^2}{2a}e^{a(t+v)}(e^{-2at} - e^{-2as}) \end{aligned}$$

In particolare, la varianza di X_t é uguale a:

$$\begin{aligned} Var[X_t] &= e^{2a(t-s)}Var[X] - \frac{\sigma^2}{2a}e^{2at}(e^{-2at} - e^{-2as}) = \\ &= e^{2a(t-s)}Var[X] + \frac{\sigma^2}{2a}(e^{2a(t-s)} - 1) \end{aligned}$$

Rimane cosí specificata sia la legge delle soluzioni, sia quella del processo delle soluzioni; abbiamo inoltre provato il seguente:

Teorema 5.8 *: l'equazione (5.6) ha la soluzione forte unica in traiettorie data dal processo:*

$$X_t = Xe^{a(t-s)} + \frac{c}{a}\left(e^{a(t-s)} - 1\right) + \sigma e^{at}\int_s^t e^{-au}\ dW_u \tag{5.8}$$

che é gaussiano, con media (5.7) e covarianza:

$$Cov(X_t, X_v) = e^{a(t+v-2s)}Var[X] + \frac{\sigma^2}{2a}e^{a(t+v)}(e^{-2at} - e^{-2as}) \tag{5.9}$$

□

Passiamo ora al caso n-dimensionale. Si dice **processo di Ornstein - Uhlenbeck n-dimensionale** un processo a valori in $\mathbf{R}^n$ che soddisfa l'equazione:

$$\begin{cases} dX_t = (AX_t + c)\ dt + \sigma dW_t \\ X_s = X \end{cases} \tag{5.10}$$

con $A \in M(n,n,\mathbf{R}), c \in \mathbf{R}^n, \sigma \in M(n,k,\mathbf{R}), (W_t)_t$ é un moto browniano k-dimensionale e $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbf{P}; \mathbf{R}^n)$. Anche stavolta l'equazione soddisfa le ipotesi (A), quindi esiste una soluzione ed é l'unica in $C_p([s,t])$.

Come nel caso unidimensionale, poniamo $Y_t = F(t).X_t$, dove peró $F(t)$ é una funzione di classe $C^1([s,t], M(n,n,\mathbf{R}))$ che soddisfa l'equazione:

$$\begin{cases} F(t).A + F'(t) = 0 \\ F(s) = I \end{cases}$$

Se definiamo l'**esponenziale di una matrice**:

$$e^{tA} = \sum_0^\infty {}_i \frac{(tA)^i}{i!}$$

allora e^{tA} gode delle seguenti proprietá:

1) é una funzione analitica da $\mathbf{R}$ in $M(n,n,\mathbf{R})$;
2) la sua derivata in t é $A.e^{tA} = e^{tA}.A$;
3) $e^{0A} = I$;

4) $e^{(t+s)A} = e^{tA}.e^{sA}$;
5) la matrice e^{tA} é invertibile qualunque siano t ed A, e la sua inversa é e^{-tA};
6) $(e^{tA})^* = e^{tA^*}$

Si puó facilmente verificare che $e^{-(t-s)A}$ é soluzione del sistema di sopra. Allora, calcolando il differenziale stocastico di Y_t componente per componente, abbiamo:

$$\begin{aligned} dY_t^i &= (F_i'(t).X_t + F_i(t).(AX_t + c))\ dt + F_i(t).\sigma\ dW_t = \\ &= F_i(t).c\ dt + F_i(t).\sigma\ dW_t \end{aligned}$$

cioé $dY_t = F(t).c\ dt + F(t).\sigma\ dW_t$, che ci dá la formula esplicita:

$$Y_t = Y_s + \int_s^t e^{-(u-s)A} c\ du + \int_s^t e^{-(u-s)A} \sigma\ dW_u$$

allora la soluzione esplicita dell'equazione é:

$$\begin{aligned} X_t &= e^{(t-s)A} Y_t = \\ &= e^{(t-s)A} X + e^{(t-s)A} \int_s^t e^{-(u-s)A} c\ du + e^{(t-s)A} \int_s^t e^{(u-s)A} \sigma\ dW_u = \\ &= e^{(t-s)A} X + e^{tA} \left(\int_s^t e^{-uA}\ du \right) c + e^{tA} \int_s^t e^{uA} \sigma\ dW_u \end{aligned}$$

Anche in questo caso, poiché $\int_s^t e^{-uA}\ dW_u$ é un integrale stocastico di una funzione deterministica, é una variabile aleatoria gaussiana n-dimensionale. Allora, se anche il dato iniziale X é una variabile aleatoria gaussiana n-dimensionale, anche la soluzione X_t e' gaussiana $\forall t$, ed inoltre il processo$(X_t)_t$ é gaussiano, e, come nel caso unidimensionale, la legge del processo delle soluzioni é univocamente determinata dalla media e dalla covarianza.

Calcoliamo ora media e covarianza delle soluzioni; prendo $t \in [s, T]$ e v tale che $t \leq v \leq T$; grazie agli stessi accorgimenti usati in dimensione 1 ho:

$$E[X_t] = e^{(t-s)A} E[X] + e^{tA} \left(\int_s^t e^{-uA}\ du \right) c \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_v) &= Cov\left(e^{(t-s)A} X + e^{tA} \int_s^t e^{-uA} \sigma\ dW_u, e^{(v-s)A} X + \right. \\ &\quad \left. + e^{vA} \int_s^v e^{-uA} \sigma\ dW_u \right) = \\ &= Cov(e^{(t-s)A} X, e^{(v-s)A} X) + \\ &\quad + Cov\left(e^{tA} \int_s^t e^{-uA} \sigma\ dW_u, e^{vA} \int_s^v e^{-uA} \sigma\ dW_u \right) \end{aligned}$$

Ricordando che $Q = Cov(X, Y)$ significa che

$$< Qx, y >= Cov(< X, x >< Y, y >)$$

allora, se $A, B \in M(n,n,\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} Cov(< AX, x >< BY, y >) &= Cov(< X, A^*x >< Y, B^*y >) = \\ &= < QA^*x, B^*y > = < BQA^*x, y > \end{aligned}$$

cioé $Cov(AX, BY) = B.Q.A^*$; allora:

$$Cov(e^{(t-s)A}X, e^{(v-s)A}X) = e^{(v-s)A}Cov(X,X)e^{(t-s)A^*}$$

$$Cov\left(e^{tA}\int_s^t e^{-uA}\sigma\ dW_u \quad , \quad e^{vA}\int_s^v e^{-uA}\sigma\ dW_u\right) =$$

$$e^{vA}Cov\left(\int_s^t e^{-uA}\sigma\ dW_u, \int_s^t e^{-uA}\sigma\ dW_u\right)e^{tA^*} =$$

$$= e^{vA}\left(\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^*e^{-uA^*}\ du\right)e^{tA^*}$$

e infine:

$$Cov(X_t, X_v) = e^{(v-s)A}Cov(X,X)e^{(t-s)A^*} + e^{vA}\left(\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^*e^{-uA^*}\ du\right)e^{tA^*} \qquad (5.12)$$

In particolare, la covarianza di X_t é uguale a:

$$Cov(X_t, X_t) = e^{(t-s)A}Cov(X,X)e^{(t-s)A^*} + e^{tA}\left(\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^*e^{-uA^*}\ du\right)e^{tA^*}$$

Anche ora rimangono specificate sia la legge delle soluzioni, sia la legge del processo, e abbiamo dimostrato il:

Teorema 5.9 *: l'equazione (5.10) ammette la soluzione forte, unica in legge, data dal processo definito da:*

$$X_t = e^{(t-s)A}X + e^{tA}\left(\int_s^t e^{-uA}\ du\right)c + e^{tA}\int_s^t e^{uA}\sigma\ dW_u \qquad (5.13)$$

che é gaussiano, con media data da (5.11) e covarianza data da (5.12).

□

Vediamo ora se riusciamo a trovare delle condizioni sul dato iniziale e sui coefficienti affinché il processo delle soluzioni sia stazionario, cioé la sua legge sia invariante per traslazioni temporali. Siccome il processo delle soluzioni é gaussiano, la sua legge é determinata univocamente dalla sua media e dalla sua covarianza. Se queste sono invarianti per traslazioni temporali, allora il processo sará stazionario.

Notiamo che sia media che covarianza sono funzioni analitiche di t e di v, quindi derivabili; allora, per imporre la non dipendenza da t, occorre e basta imporre le due condizioni:

$$\frac{\partial}{\partial t}E[X_t] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Cov(X_t, X_{t+h}) = 0$$

La prima condizione ci dá:

$$Ae^{(t-s)A}E[X] + Ae^{tA}\left(\int_s^t e^{-uA}c\ du\right) + e^{tA}e^{-tA}c = 0$$

$$Ae^{-sA}E[X] = -A\int_s^t e^{-uA}c\ du - e^{-tA}c = [e^{-uA}]_s^t - e^{-tA}c = -e^{-sA}c$$

$$AE[X] = -c$$

e questa é la prima condizione. Vediamo la seconda; chiamiamo per brevitá $Q = Cov(X,X)$ abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{(t+h-s)A}Qe^{(t-s)A^*} + e^{(t+h)A}\left(\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}\ du\right)e^{tA^*}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
Ae^{(t+h-s)A}Qe^{(t-s)A^*} + e^{(t+h-s)A}Qe^{(t-s)A^*}A^* \quad &+ \quad Ae^{(t+h)A}\left(\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}\ du\right)e^{tA^*} + \\
&+ \quad e^{(t+h)A}e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}e^{tA^*} + \\
&+ \quad e^{(t+h)A}\left(\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}\ du\right)e^{tA^*}A^* = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ae^{(h-s)A}Qe^{-sA^*} + e^{(h-s)A}Qe^{-sA^*}A^* \quad &= \quad -Ae^{hA}\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}\ du - e^{hA}e^{-tA}\sigma\sigma^* e^{-tA^*} - \\
&\quad\ -e^{hA}\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}\ duA^* = \\
&= \quad -e^{hA}e^{-tA}\sigma\sigma^* e^{-tA^*} - e^{hA}\int_s^t \Big(Ae^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*} + \\
&\quad\ + e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}A^*\Big)\ du = \\
&= \quad -e^{hA}e^{-tA}\sigma\sigma^* e^{-tA^*} - e^{hA}[e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}]_s^t = \\
&= \quad -e^{hA}e^{-sA}\sigma\sigma^* e^{-sA^*}
\end{aligned}$$

Da questo si ricava:

$$AQ + QA + \sigma\sigma^* = 0$$

Le due condizioni trovate su media e covarianza del dato iniziale X sono allora necessarie e sufficienti affinché il processo delle soluzioni $(X_t)_t$ sia stazionario. Abbiamo allora dimostrato il seguente

Teorema 5.10 *: condizione necessaria e sufficiente affinché $(X_t)_t$ sia stazionario é che il dato iniziale X sia di legge $N(m,Q)$ tale che:*

$$\begin{cases} Am = -c \\ AQ + QA + \sigma\sigma^* = 0 \end{cases}$$

□

Sorgono ora due problemi:

1) esistono m e Q con queste caratteristiche?

2) se esistono, c'é un modo diretto per trovarli?

C'é un modo classico per risolvere questi due problemi, che peró richiede come ipotesi aggiuntiva che $\lim_{s\to-\infty} e^{sA} = 0$; questo implica che $\exists M > 0, \lambda > 0$ tali che $|e^{tA}| \leq Me^{-\lambda t}$ (ció succede, ad esempio, se lo spettro di A é composto solo da autovalori con parte reale negativa). L'idea é quella di far tendere l'istante iniziale s a $-\infty$; allora, se chiamo $(X_t^{s,X})_t$ il processo ottenuto come soluzione dell'equazione con condizione iniziale $X_s = X$, il processo $\overline{X}_t = \lim_{s\to-\infty} X_t^{s,X}$ é un buon candidato ad essere il processo stazionario cercato.

C'é un problema tecnico: come definire l'integrale stocastico con un estremo di integrazione negativo? Per risolverlo, costruiamo il seguente processo $(Z_t)_t$, che chiameremo **moto browniano esteso**, o **moto browniano bilaterale**.

Consideriamo due moti browniani $(W_t)_t$ e $(W'_t)_t$ indipendenti ed adattati rispettivamente alle filtrazioni $(\mathcal{F}_t)_t$ e $(\mathcal{F}'_t)_t$, e definisco Z_t in questo modo:

$$Z_t = \begin{cases} W_t & \text{se } t \geq 0 \\ W'_{-t} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Consideriamo inoltre la filtrazione $(\mathcal{G}_t)_t$ cosí costruita:

$$\mathcal{G}_t = \cup_{u\leq s\leq t}\sigma(Z_s - Z_u) \cup \{A \in \mathcal{F} | \mathbf{P}(A) = 0 \text{ o } \mathbf{P}(A) = 1\}$$

Lemma 5.11 *: il processo $(Z_t)_t$ gode delle seguenti proprietá:*

1) $Z_0 = 0$ q.c.
2) se $t > s$, $Z_t - Z_s$ é $\mathcal{G}_t$-misurabile
3) se $t > s$, $Z_t - Z_s$ é indipendente da $\mathcal{G}_s$
4) se $t > s$, $Z_t - Z_s$ ha legge $N(0, t-s)$

Dimostrazione: 1) $Z_0 = W_0 = 0$ q.c.

2) ovvio per come abbiamo costruito $\mathcal{G}_s$

3) se $0 \leq s < t$, la tesi é banale; supponiamo che $s < t \leq 0$; allora $Z_t - Z_s = -(W'_{-s} - W'_{-t})$ é $\mathcal{F}'_s-$misurabile, e quindi é indipendente da ogni variabile aleatoria della

forma $W'_{-u} - W'_{-v}$, con $u < v \leq s$, cioé da ogni $Z_u - Z_v$, e quindi é indipendente da $\mathcal{G}_s$; infine, se $s < 0 < t$, ho:

$$Z_t - Z_s = W_t - W'_{-s} = (W_t - W_0) + (W'_0 - W'_{-s})$$

il primo addendo é indipendente da $\mathcal{G}_s$, perché $\mathcal{G}_s$ é generato solo da variabili del processo $(W'_t)_t$, ed il secondo é indipendente da $\mathcal{G}_s$ per quanto dimostrato prima.

4) se $0 \leq s < t$, la tesi é banale; supponiamo che $s < t \leq 0$; allora $Z_t - Z_s = -(W'_{-s} - W'_{-t})$ ha legge $N(0, -s+t)$; supponiamo infine che $s < 0 < t$; allora:

$$Z_t - Z_s = (W_t - W_0) + (W'_0 - W'_{-s})$$

il primo addendo ha legge $N(0,t)$, il secondo ha legge $N(0,s)$ e sono indipendenti.

□

Queste sono le quattro proprietá formali da cui si costruisce la teoria dell'integrazione stocastica fin qui usata. Inoltre notiamo che $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$. Possiamo quindi costruire un integrale stocastico rispetto al processo $(Z_t)_t$, con le stesse proprietá dell'integrale costruito rispetto ad un moto browniano, puntualizzando peró che, se $X \in \Lambda^2_Z([s,t])$, allora $\int_s^t X_u \, dZ_u$ é $\mathcal{G}_t$-misurabile.

Controlliamo ora se la nostra idea funziona. Scriviamo la soluzione dell'equazione di Ornstein - Uhlenbeck sostituendo $(Z_t)_t$ a $(W_t)_t$:

$$X_t^{s,X} = e^{(t-s)A} X + e^{tA} \int_s^t e^{-uA} c \, du + e^{tA} \int_s^t e^{-uA} \sigma \, dZ_u$$

e calcoliamone il limite per $s \to -\infty$, facendo l'ipotesi che $\lim_{s \to -\infty} e^{-sA} = 0$; sotto questa ipotesi, i due integrali convergono (rispettivamente, il primo uniformemente ed il secondo in L^2), e possiamo definire il processo $(\overline{X}_t)_t$ in questo modo:

$$\overline{X}_t = \lim_{s \to -\infty} X_t^{s,X} = e^{tA} \int_{-\infty}^t e^{-uA} c \, du + e^{tA} \int_{-\infty}^t e^{-uA} \sigma \, dZ_u$$

Notiamo che $(\overline{X}_t)_t$ non dipende dal dato iniziale X.

Ci sono ora due cose da verificare:

1) $(\overline{X}_t)_t$ risolve l'equazione di Ornstein-Ulhenbeck, con qualsiasi istante iniziale.

2) $(\overline{X}_t)_t$ é stazionario.

Verifichiamo il punto (1); supponiamo di volere 0 come istante iniziale; allora $\forall t > 0$ ho:

$$\begin{aligned}
\overline{X}_t &= e^{tA}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-uA}c\ du + \int_{0}^{t} e^{-uA}c\ du + \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\ dZ_u + \int_{0}^{t} e^{-uA}\sigma\ dZ_u\right) = \\
&= e^{tA}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-uA}c\ du + \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\ dZ_u\right) + e^{tA}\int_{0}^{t} e^{-uA}c\ du + e^{tA}\int_{0}^{t} e^{-uA}\sigma\ dW_u
\end{aligned}$$

quindi $(\overline{X}_t)_t$ é soluzione dell'equazione di Ornstein - Ulhenbeck con dato iniziale:

$$\overline{X}_0 = \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}c\ du + \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\ dZ_u$$

Per controllare se $(\overline{X}_t)_t$ é stazionario, occorre e basta verificare che media e covarianza del dato iniziale:

$$m = E[\overline{X}_0] = \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}c\ du$$

$$\begin{aligned}
Q &= Cov(\overline{X}_0, \overline{X}_0) = Cov(\int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\ dZ_u, \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\ dZ_u) = \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}\ du
\end{aligned}$$

soddisfano le condizioni:

$$\begin{cases} Am + c = 0 \\ AQ + QA^* + \sigma\sigma^* = 0 \end{cases}$$

controlliamo:

$$\begin{aligned}
A\int_{-\infty}^{0} e^{-uA}c\ du + c &= \int_{-\infty}^{0} Ae^{-uA}c\ du + c = [-e^{-uA}]_{-\infty}^{0}c + c = \\
&= -Ic + c = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}\ du &+ \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}\ duA^* + \sigma\sigma^* = \\
&= \int_{-\infty}^{0} (Ae^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*} + e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}A^*)\ du + \sigma\sigma^* = \\
&= [-e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}]_{-\infty}^{0} + \sigma\sigma^* = \\
&= -\sigma\sigma^* + \sigma\sigma^* = 0
\end{aligned}$$

Abbiamo cosí dimostrato il:

Teorema 5.12 : *il processo $(\overline{X}_t)_t$ definito da:*

$$\overline{X}_t = e^{tA} \int_{-\infty}^{t} e^{-uA} c \; du + e^{tA} \int_{-\infty}^{t} e^{-uA} \sigma \; dZ_u$$

é soluzione stazionaria dell'equazione di Ornstein - Uhlenbeck (5.10).

□

5.5 Legge delle soluzioni di una equazione differenziale stocastica

Se abbiamo l'equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_s = X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbf{P}) \end{cases} \tag{5.14}$$

e supponiamo che esista una soluzione unica in traiettorie (questo succede se ad esempio siamo nelle ipotesi (A)); chiamiamo $X_t^{s,x}$ la soluzione di questa equazione, parametrizzata, oltre che rispetto al tempo t, anche rispetto al punto iniziale x ed all'istante iniziale s.

Ci poniamo ora il problema di calcolare la legge del processo $(X_t^{s,x})_t$, che verrá chiamata **legge del processo delle soluzioni** dell'equazione (5.14); la legge marginale della variabile aleatoria $X_t^{s,x}$ verrá chiamata **legge della soluzione in** t e indicata con il simbolo $\mathcal{L}(X_t^{s,x})$. Abbiamo visto che, nel caso dell'equazione di Ornstein - Uhlenbeck, calcolare la legge del processo era molto facile. Vediamo cosa succede nel caso generale.

Definiamo le classi:

$$B_b(\mathbf{R}^n) = \{\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \mid \phi \text{ misurabile e limitata}\}$$
$$C_b(\mathbf{R}^n) = \{\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \mid \phi \text{ continua e limitata}\}$$
$$M^+(\mathbf{R}^n) = \{\mu \mid \mu \text{ misura positiva su } (\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))\}$$
$$M_1^+(\mathbf{R}^n) = \{\mu \mid \mu \text{ misura di probabilità su } (\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))\}$$

e gli operatori $P_{s,t} : B_b(\mathbf{R}^n) \to B_b(\mathbf{R}^n)$ definiti in modo che $\forall \phi \in B_b(\mathbf{R}^n), \forall x \in \mathbf{R}^n$:

$$(P_{s,t}\phi)(x) = E[\phi(X_t^{s,x})]$$

Notiamo che $P_{s,t}$ é lineare e vale il seguente:

Lemma 5.13 : *$P_{s,t} : C_b(\mathbf{R}^n) \to C_b(\mathbf{R}^n)$ ed é continua.*

Dimostrazione: la dimostrazione che, se $\phi \in C_b(\mathbf{R}^n)$, allora $P_{s,t}\phi \in C(\mathbf{R}^n)$ sfrutta il teorema (5.5) sulla dipendenza continua dai dati; verifichiamo che $P_{s,t}$ é limitato: se $\|\phi\|_{C^0} \leq K$, allora:

$$\|P_{s,t}\phi\|_{C^0} = \|E[\phi(X_t^{s,X})]\|_{C^0} \leq E[K] = K$$

e quindi, in particolare, $\|P_{s,t}\|_{L(C^0,C^0)} \leq 1$ e $P_{s,t}\phi \in C_b(\mathbf{R}^n)$.

□

Definiamo poi il nucleo $P : [0,T] \times [0,T] \times \mathbf{R}^n \times \mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ tale che, $\forall s < t \in [0,T], x \in \mathbf{R}^n, B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$:

$$P(s,t,x,B) = P_{s,t}\mathbf{1}_B(x) = E[\mathbf{1}_B(X_t^{s,x})] = \mathcal{L}(X_t^{s,x})(B)$$

Definiamo infine $P^*_{s,t} : M_1^+ \to M_1^+$ tale che $\forall \mu \in M_1^+, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$:

$$(P^*_{s,t}\mu)(B) = \int_{\mathbf{R}^n} P(s,t,x,B)\ d\mu(x)$$

se definiamo l'accoppiamento di dualitá tra $B_b(\mathbf{R}^n)$ e $M_1^+(\mathbf{R}^n)$:

$$< \phi, \mu >= \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x)\ d\mu(x)$$

allora abbiamo il:

Lemma 5.14 *: $\forall \phi \in B_b(\mathbf{R}^n), \forall \mu \in M_1^+(\mathbf{R}^n)$:*

$$< P_{s,t}\phi, \mu >=< \phi, P^*_{s,t}\mu >$$

Dimostrazione: verifichiamo che la relazione vale $\forall \mathbf{1}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$:

$$\begin{aligned} < P_{s,t}\mathbf{1}_B, \mu > &= \int_{\mathbf{R}^n} P_{s,t}\mathbf{1}_B(x)\ d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}^n} P(s,t,x,B)\ d\mu(x) = \\ &= (P^*_{s,t})(B) =< \mathbf{1}_B, P^*_{s,t} > \end{aligned}$$

siccome le indicatrici sono dense in $B_b(\mathbf{R}^n)$, la relazione é vera $\forall \phi \in B_b(\mathbf{R}^n)$.

□

Vediamo ora che gli operatori appena definiti danno una utile espressione della legge delle soluzioni:

Proposizione 5.15 *: se $\mathcal{L}(X) = \nu$, allora $P^*_{s,t}\nu = \mathcal{L}(X_t^{s,X})$, e $P^*_{s,t}\delta_x = \mathcal{L}(X_t^{s,x})$*

Dimostrazione: $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X_t^{s,X})(B) &= \mathbf{P}\{X_t^{s,X} \in B\} = E[\mathbf{1}_B(X_t^{s,X})] = \int_{\mathbf{R}^n} P_{s,t}\mathbf{1}_B(x)\ d\nu(x) = \\ &= < P_{s,t}\mathbf{1}_B, \nu > = < \mathbf{1}_B, P_{s,t}^*\nu > = (P_{s,t}^*\nu)(B)\end{aligned}$$

se $\mathcal{L}(X) = \delta_x$, allora $P_{s,t}^*\delta_x = \mathcal{L}(X_t^{s,X}) = \mathcal{L}(X_t^{s,x})$

□

Corollario 5.16 *:* $P_{s,u}^* = P_{t,u}^* \circ P_{s,t}^*$; $P_{s,u} = P_{s,t} \circ P_{t,u}$

Dimostrazione: se poniamo $\mathcal{L}(X) = \nu$, allora $P_{t,u}^* \circ P_{s,t}^*\nu = \mathcal{L}(X_u^{t,X_t^{s,X}})$; questo equivale a trovare la legge dell'equazione con dato iniziale $X_t^{s,X}$ ed istante iniziale t; questa, all'istante u, ha la stessa soluzione di $X_u^{s,X}$, e quindi abbiamo che $\mathcal{L}(X_u^{s,X}) = P_{t+s}^*\nu$.

La seconda relazione si ricava banalmente dalla prima e dalla relazione di dualitá.

□

5.6 Equazioni alle derivate parziali legate ad una equazione differenziale stocastica

Ci mettiamo ora nelle ipotesi in cui i coefficienti di drift e di diffusione siano descritti da funzioni deterministiche $b \in C^1(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$ e $\sigma \in C^2(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}^{n\times k})$, e vogliamo trovare delle equazioni alle derivate parziali che descrivano la legge.

Calcoliamo ora la quantitá

$$u(t, s, x) = E[\phi(X_t^{s,x})]$$

per una $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, poiché questo basta ad identificare la legge. Notiamo innanzitutto che questa espressione é uguale a:

$$E[\phi(X_{s,x}^t)] = \int_{\mathbf{R}^n} \phi(X_{s,x}^t)\ d\mathbf{P} = P_{s,t}\phi(x)$$

dove $P_{s,t}$ é la probabilitá di transizione delle soluzioni costruita precedentemente. Vale allora il seguente

Teorema 5.17 *: nelle ipotesi precedentemente fatte, $u(t, s, x)$ soddisfa la seguente equazione, detta* **equazione backward***:*

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}u(t, s, x) + L_s u(t, s, x) = 0 \\ u(t, t, x) = \phi(x) \end{cases} \tag{5.15}$$

dove $L_s : C_b^2 \to C^0$ *é definita, per* $\phi \in C^2$*, da:*

$$L_s\phi(x) = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi(x)(\sigma.{}^t\sigma)_{ij} + \vec{\nabla}\phi(x)b(s,x)$$

Dimostrazione: per la formula di Ito abbiamo:

$$\begin{aligned} d\phi(X_t) &= \vec{\nabla}\phi(X_t)dX_t + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi(X_t)(\sigma.{}^t\sigma)_{ij}\ dt = \\ &= (\vec{\nabla}\phi(X_t)b(t,X_t) + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi(X_t)(\sigma.{}^t\sigma)_{ij})dt + \\ &\quad +\vec{\nabla}\phi(X_t)\sigma(t,X_t)dW_t \end{aligned}$$

Allora abbiamo:

$$\begin{aligned} \phi(X_t) - \phi(X_s) &= \int_s^t (\vec{\nabla}\phi(X_u)b(u,X_u) + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi(X_u)(\sigma.{}^t\sigma)_{ij})\ du + \\ &\quad + \int_s^t \vec{\nabla}\phi(X_u)\sigma(u,X_u)\ dW_u \end{aligned}$$

Calcoliamo la speranza di questa quantitá, ricordando che l'integrale stocastico é una variabile aleatoria centrata:

$$\begin{aligned} E[\phi(X_t)] &- E[\phi(X_s)] = \\ &= E\left[\int_s^t \left(\vec{\nabla}\phi(X_u)b(u,X_u) + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi(X_u)(\sigma.{}^t\sigma)_{ij}\right)\ du\right] \end{aligned}$$

che, introducendo il nucleo $P_{s,t}$ diventa:

$$P_{s,t}\phi(x) - \phi(x) = \int_s^t P_{s,u}L_u\phi(x)\ du$$

Allora abbiamo che:

$$\frac{1}{h}(P_{s-h,s}\phi(x) - \phi(x)) = \frac{1}{h}\int_{s-h}^s P_{s-h,u}L_u\phi(x)\ du$$

cioé

$$\frac{1}{h}(u(s,s-h,x) - u(s,s,x)) = \frac{1}{h}\int_{s-h}^s P_{s-h,u}L_u\phi(x)\ du$$

Siccome l'operatore $P_{s,t}$ é continuo da C^0 in sé, allora abbiamo che:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(P_{s-h,s}\phi(x) - \phi(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(u(s,s-h,x) - u(s,s,x)) = -L_s\phi(x)$$

Calcoliamo ora la derivata sinistra di $u(t,s,x)$ rispetto ad s:

$$\begin{aligned}
D_{s-}u(t,s,x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(u(t,s-h,x)-u(t,s,x)) = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(P_{s-h,t}\phi(x)-P_{s,t}\phi(x)) \\
&= \lim \frac{1}{h}(P_{s-h,s}(P_{s,t}\phi(x))-(P_{s,t}\phi(x))) \\
&= -L_sP_{s,t}\phi(x) = -L_su(t,s,x)
\end{aligned}$$

che é una funzione continua, quindi abbiamo:

$$\frac{d}{ds}u(t,s,x)+L_su(t,s,x)=0$$

e la condizione iniziale si ottiene banalmente. Abbiamo quindi la tesi.

□

Partiamo ora dal sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}u(t,s,x)+L_su(t,s,x)=0 \\ u(t,t,x)=\phi(x) \end{cases} \tag{5.16}$$

e consideriamo $v(s,x)$ che sia soluzione (in senso distribuzionale) di

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}v(s,x)=L_s^*v(s,x) \\ v(0,x)=\delta_y \end{cases}$$

dove δ_y é la distribuzione delta di Dirac, e L_s^* é l'operatore aggiunto di L_s (rispetto all'accoppiamento dualitá C^∞ - distribuzioni); allora, se abbiamo $f\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, e una distribuzione g individuabile con una funzione di classe $C^2(\mathbf{R}^n)$, allora:

$$< L_sf,g >=< f,L_s^*g >$$

Esplicitamente, per L_s^* abbiamo l'espressione:

$$L_s^*\phi(x)=\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}(\phi(x)(\sigma.^t\sigma)_{ij})-\sum\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi(x)b(s,x))$$

Allora abbiamo:

$$\frac{d}{ds}\int_{\mathbf{R}^n}u(t,s,x)v(s,x)\,dx=\int_{\mathbf{R}^n}(u(t,s,x)L_s^*v(s,x)-L_su(t,s,x)v(s,x))\,dx=0$$

cioé la quantitá $\int_{\mathbf{R}^n}u(t,s,x)v(s,x)\,dx$ é costante in s per $s=0$ e per $s=t$:

$$\int_{\mathbf{R}^n} u(t,t,x)v(t,x)\ dx = \int_{\mathbf{R}^n} u(t,0,x)v(0,x)\ dx$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \phi(x)v(t,x)\ dx = u(t,0,y) = E[\phi(X_{t_0},y)] = \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x)p(s,t,y,dx)$$

dove $p(s,t,y,dx)$ é la legge della soluzione $X_t^{s,x}$ data dal nucleo di transizione p. Siccome questa relazione vale $\forall\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, che é denso in $C^0(\mathbf{R}^n)$; allora abbiamo:

$$v(t,x)\ dx = p(s,t,y,dx)$$

che lega la soluzione $v(t,x)$ dell'equazione di sopra con la legge delle soluzioni. L'equazione (5.16) é chiamata **equazione di Fokker - Planck**, o anche **equazione forward di Kolmogorov**.