# Capitolo 6

# Processi di Ornstein - Uhlenbeck a valori in spazi di Hilbert

Da questo momento in poi assumeremo sempre che $H$ sia uno spazio di Hilbert separabile reale, dotato del prodotto scalare $< .,. >_H$, che induce la norma $\|.\|_H$. Con il simbolo $L(H,H)$ indichiamo lo spazio vettoriale degli operatori lineari e continui da $H$ in sé; questo é uno spazio normato con la norma:

$$\|A\|_{L(H,H)} = \sup\{\|Ax\|_H \mid x \in H, \|x\| = 1\}$$

## 6.1 Semigruppi di operatori lineari

Diciamo che $\{S_t\}_{t\geq 0}$ é un **semigruppo di operatori lineari e continui**, o semplicemente un **semigruppo**, se gode delle seguenti proprietá:

1) $S_t \in L(H,H)$ $\forall t \geq 0$
2) $S_0 = I$
3) $S_{t+s} = S_t \circ S_s$

diciamo che il semigruppo $\{S_t\}_{t\geq 0}$ é **fortemente continuo** se verifica anche la proprietá:

4) $\forall x \in H : \lim_{t\to 0^+} S_t x = x$

questa condizione si esprime anche dicendo che la successione $\{S_t\}_{t\geq 0}$ **converge fortemente** a $I$ per $t \to 0^+$. La convergenza forte é piú debole della convergenza in norma in $L(H,H)$.

Definiamo ora il seguente sottospazio vettoriale di $H$:

$$D = D(A) = \left\{ x \in H \;\middle|\; \exists \lim_{t\to 0^+} \frac{S_t x - x}{t} \right\}$$

e definiamo l'operatore lineare $A$ su $D(A)$:

$$\forall x \in D(A) : Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{S_t x - x}{t}$$

$D$ viene chiamato spesso **dominio** di $A$, e $A$ viene detto **generatore infinitesimale** del semigruppo $\{S_t\}_{t \geq 0}$. L'espressione che definisce di $A$ puó essere anche scritta in questo modo: se $x \in D(A)$, allora $D^+ S_t x|_{t=0^+} = Ax$.

**Esempio 6.1** *: se $H = \mathbf{R}^n$, e $A \in M(n, n, \mathbf{R})$, allora $A$ é generatore infinitesimale del semigruppo definito da:*

$$S_t = e^{tA} = \sum_0^\infty {}_i \frac{(tA)^i}{i!}$$

$\square$

**Teorema 6.2** *: se $\{S_t\}_{t \geq 0}$ é un semigruppo fortemente continuo, allora esistono due costanti reali $M, \lambda$ tali che:*

$$\|S_t\|_{L(H,H)} \leq Me^{\lambda t}$$

Per una dimostrazione vedere Pazy[1], pag. 4.

$\square$

**Teorema 6.3** *: se $A : D(A) \to H$ é il generatore infinitesimale di $\{S_t\}_{t \geq 0}$, allora $D$ é denso in $H$, $A$ é chiuso e si ha che:*

$$\forall x \in D(A) : S_t x \in D(A) \text{ e } \forall t \geq 0 : \frac{dS_t x}{dt} = AS_t x = S_t Ax$$

**Dimostrazione**: per una dimostrazione che $D$ é denso in $H$ e $A$ é chiuso, vedi Pazy[1]; proviamo ora la seconda parte. $\forall x \in D(A) : S_t x \in D(A)$. Se $x \in D(A)$, allora, siccome $S_t \in L(H, H)\ \forall t > 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{S_{t+h}x - S_t x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{S_t S_h x - S_t x}{h} = \lim_{h \to 0} S_t \frac{S_h x - x}{h} = S_t \lim_{h \to 0} \frac{S_h x - x}{h} = S_t Ax$$

che prova contemporaneamente che $\forall x \in D(A) : S_t x \in D(A)$ e che $\frac{dS_t x}{dt} = S_t Ax$. Inoltre:

$$\frac{dS_t x}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{S_{t+h}x - S_t x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{S_h S_t x - S_t x}{h} = AS_t x$$

che completa la dimostrazione.

$\square$

**Corollario 6.4** *: $v(t) = S_t x$ é soluzione dell'equazione differenziale ordinaria a valori in $H$:*

$$\begin{cases} v' = Av \\ v(0) = x \end{cases}$$

## 6.2 Integrale di Bochner

Ci proponiamo ora di studiare un'equaazione differenziale ordinaria a valori in $H$ di un tipo leggermente piú generale di quella del corollario (6.4).

Per farlo ci serve uno strumento, chiamato integrale di Bochner.

Supponiamo di avere uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, e una variabile aleatoria $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (H, \mathcal{H})$. Allora $X$ si dice **integrabile secondo Bochner** se:

$$\int_\Omega \|X\|_H \; d\mathbf{P} < +\infty$$

Se $X$ é integrabile secondo Bochner, puó essere determinato univocamente un elemento $E[X]$ in $H$, corrispondente alla **speranza** di $X$, chiamato **integrale di Bochner**, che viene costruito, esattamente come l'integrale di una variabile aleatoria reale, prima sulle indicatrici ed esteso poi per convergenza monotona (vedere Da Prato - Zabczyk[1], pagg.19 - 20). Analogamente, se prendiamo $\Omega = [0,T]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,T])$ e come $\mathbf{P}$ la misura di Lebesgue su $[0,T]$, possiamo dire che $f : [0,T] \to H$ é integrabile secondo Bochner se $\int_{[0,T]} \|f(t)\|_H \; dt < +\infty$, e indicare il suo integrale di Bochner con $\int_{[0,T]} f(t) \; dt$.

Prendiamo ora $f : [0,T] \to H$, e studiamo l'equazione:

$$\begin{cases} u' = Au + f \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Se $u_0 \in D(A)$ e $f$ é a valori in $D(A)$ e tale che la funzione $s \to S_{t-s} f(s)$ é integrabile secondo Bochner, allora la soluzione del sistema di sopra é:

$$u(t) = S_t u_0 + \int_0^t S_{t-s} f(s) \; ds$$

infatti:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= AS_t u_0 + S_{t-t} f(t) + \int_0^t AS_{t-s} f(s) \; ds = \\ &= AS_t u_0 + A \int_0^t S_{t-s} f(s) \; ds + f(t) = Au + f \end{aligned}$$

Se $f : [0, T] \in H$ e $u_0 \in H$, allora l'espressione di sopra, che rimane ben definita, si dice **soluzione mild**.

## 6.3 Processi di Ornstein - Uhlenbeck a valori in spazi di Hilbert

Ci proponiamo ora di studiare un'equazione stocastica particolare, chiamata **equazione di Ornstein - Uhlenbeck a valori in uno spazio di Hilbert**, nel caso particolare che sia governata da un moto browniano unidimensionale. Per fare questo, abbiamo bisogno di definire l'integrale stocastico rispetto ad un moto browniano unidimensionale di una funzione deterministica a valori in uno spazio di Hilbert.

Prendiamo una funzione $f : [0, T] \to H$ tale che $\int_{[0,T]} f^2(t)\ dt < +\infty$; $f$ si dice **semplice** se é della forma:

$$f(t) = \sum_i f_i.\mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}$$

Definiamo allora l'integrale stocastico di queste funzioni rispetto al moto browniano standard $(W_t)_t$ in questo modo:

$$I(f) = \int_{[0,T]} f(t)\ dW_t = \sum_i f_i.(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Allora, possiamo costruire, come nel caso $k$-dimensionale, una isometria che estenda questa applicazione alle funzioni tali che $\int_{[0,T]} f^2(t)\ dt < +\infty$, chiamata **integrale stocastico** a valori nello spazio di Hilbert $H$. Si puó provare che essa gode delle proprietá:

1) $E[I(f)] = 0$ e

$$Cov(I(f), I(g)) = \int_{[0,T]} f(t) \otimes g(t)\ dt = \left(\int_{[0,T]} f(t)\ dt\right) \otimes \left(\int_{[0,T]} g(t)\ dt\right)$$

2) $I(f)$ é una variabile aleatoria gaussiana a valori in $H$

3) se $f$ é derivabile, allora vale la seguente formula:

$$\int_0^T f(t)\ dW_t = [f(t)W_t]_0^T + \int_0^T W_t \frac{d}{dt} f(t)\ dt$$

Possiamo definire l'integrale stocastico dipendente dal parametro di integrazione in modo analogo al caso in dimensione finita in questo modo:

$$I_t(f) = I(f.\mathbf{1}_{[0,t)})$$

Consideriamo ora l'equazione stocastica a valori in $H$:

$$\begin{cases} du_t = (Au_t + c)\ dt + \sigma\ dW_t \\ u_0 \end{cases} \tag{6.1}$$

dove $c$ é integrabile secondo Bochner, $\sigma \in H$, $u_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_I, \mathbf{P}; H)$, $(W_t)_t$ é un moto browniano reale $A : D(A) \to H$ é il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo.

Quanto diremo in questo paragrafo é estendibile quasi immediatamente al caso di un moto browniano $n-$dimensionale, e con relativamente poca fatica al caso di un moto browniano a valori in uno spazio di Hilbert $U$ (che puó essere lo stesso spazio $H$, o un altro). Siccome l'applicazione che tratteremo nel capitolo sul modello di tassi di interesse di Musiela richiede solo un moto browniano unidimensionale, ci limiteremo a questo caso per brevitá.

Ricordiamo che la soluzione di un'equazione di Ornstein - Uhlenbeck in $\mathbf{R}^n$ era data da un'espressione del tipo:

$$X_t = e^{tA}X_0 + \int_0^t e^{(t-u)A}c\ du + \int_0^t e^{(t-u)A}\sigma\ dW_u$$

Ricordiamo pure che, nel caso di una matrice $A$, il semigruppo associato era $(e^{tA})_{t\geq 0}$. Una candidata soluzione per l'equazione nello spazio $H$ puó essere:

$$u_t = S_t u_0 + \int_0^t S_{t-u}c\ du + \int_0^t S_{t-u}\sigma\ dW_u \tag{6.2}$$

**Teorema 6.5** *: se $c, \sigma \in H$, allora il processo (6.2) é l'unica soluzione mild dell'equazione; inoltre, se $c, \sigma \in D(A)$, allora (6.2) é l'unica soluzione forte.*

**Dimostrazione**: dimostriamo che l'espressione di sopra é soluzione. Notiamo prima di tutto che, siccome $(S_t)_t$ é un semigruppo fortemente continuo, allora $\exists M, \lambda$ tali che $\|S_t\| \leq Me^{\lambda t}$, quindi $\int_0^t \|S_{t-u}c\|_H\ du \leq M\|c\|_H \int_0^t e^{\lambda u}\ du$, e quindi il primo integrale ha senso; inoltre $\int_0^t \|S_{t-u}\sigma\|_H^2\ du \leq M^2\|\sigma\|_H^2 \int_0^t e^{2\lambda u}\ du$, e quindi anche il secondo é definito. Proviamo ora la seconda parte del teorema.

Notiamo che l'integrale stocastico presente nell'espressione é l'integrale di una funzione deterministica a valori in $H$, pertanto é esprimibile in questo modo:

$$\begin{aligned} \int_0^t S_{t-u}\sigma\ dW_u &= [(S_{t-u}\sigma)W_u]_0^t + \int_0^t A(S_{t-u}\sigma)W_u\ du = \\ &= \sigma W_t + \int_0^t A(S_{t-u}\sigma)W_u\ du \end{aligned}$$

Allora abbiamo questa scrittura:

$$u_t = S_t u_0 + \int_0^t S_{t-u} c \; du + \sigma W_t + \int_0^t A(S_{t-u}\sigma) W_u \; du$$

Sfruttando la formula:

$$f(t) - f(0) = \int_0^t \frac{d}{dv} f(v) \; dv$$

che é valida se $f : [0,T] \to H$ é derivabile, si arriva a scrivere:

$$\begin{aligned}
u_t &= \int_0^v S_v u_0 \; du + u_0 + \int_0^t \left( c + \int_0^v ASv - uc \; du \right) \; dv + \\
&\quad + \int_0^t \sigma \; dW_u + \int_0^t \left( A\sigma W_v + \int_0^v A^2(S_{v-u}\sigma) W_u \; du \right) \; dv = \\
&= u_0 + \int_0^t \left( A \left( S_v u_0 + \int_0^v S_{v-u} c \; du + \sigma W_v + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \int_0^v A(S_{v-u}\sigma) W_u \; du \right) + c \right) \; dv + \int_0^t \sigma \; dW_u = \\
&= u_0 + \int_0^t (Au_v + c) \; dv + \int_0^t \sigma \; dW_u
\end{aligned}$$

e quindi il processo $(u_t)_t$ é soluzione dell'equazione. Per una dimostrazione dell'unicitá vedere Da Prato - Zabczyk[1].

□

Verifichiamo ora che la soluzione esplicita é un processo gaussiano. Per questo, basta controllare che $\forall t_1, ..., t_n$ la variabile aleatoria $(u_{t_1}, ..., u_{t_n})$ é gaussiana in $H^n$; questo significa che $\forall \phi \in (H^n)^*$ la variabile aleatoria reale $\phi(u_{t_1}, ..., u_{t_n})$ deve essere gaussiana; per il teorema di rappresentazione di Riesz, questo equivale a controllare che $\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in H$:

$$\begin{aligned}
\sum_1^n {}_i < \lambda_i, u_{t_i} >_H &= \sum_1^n {}_i < \lambda_i, S_{t_i} u_0 >_H + \sum_1^n {}_i < \lambda_i, \int_0^{t_i} S_{t_i - u} c \; du >_H + \\
&\quad + \sum_1^n {}_i < \lambda_i, \int_0^{t_i} S_{t_i - u} \sigma \; dW_u >_H
\end{aligned}$$

il primo ed il secondo addendo sono numeri reali. Verifichiamo che il terzo é una variabile aleatoria gaussiana reale:

$$\begin{aligned}
\sum_1^n {}_i < \lambda_i, \int_0^{t_i} S_{t_i-u}\sigma \; dW_u >_H &= \sum_1^n {}_i < \lambda_i, \int_0^T \mathbf{1}_{[0,t_i)} S_{t_i-u}\sigma \; dW_u >_H = \\
&= \sum_1^n {}_i \int_0^T < \lambda_i, \mathbf{1}_{[0,t_i)} S_{t_i-u}\sigma >_H \; dW_u = \\
&= \int_0^T \left( \sum_1^n {}_i < \lambda_i, \mathbf{1}_{[0,t_i)} S_{t_i-u}\sigma >_H \right) \; dW_u
\end{aligned}$$

che é l'integrale stocastico di una funzione deterministica in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, quindi é una variabile aleatoria gaussiana. La legge del processo é quindi univocamente determinata dalla sua media e dalla sua covarianza. Per calcolarle ci sará utile il seguente lemma:

**Lemma 6.6** *: se $X$ e $Y$ sono variabili aleatorie a valori in $H$ con $Q = Cov(X, Y)$, e $S, T \in \mathcal{L}(H, H)$, allora $Cov(SX, TY) = TQS^*$.*

**Dimostrazione**: ricordando che $Q = Cov(X, Y)$ significa che

$$< Qx, y >= Cov(< X, x >< Y, y >) \ \forall x, y \in H$$

se $S, T \in \mathcal{L}(H, H)$ allora:

$$\begin{aligned} Cov(< SX, x >< TY, y >) &= Cov(< X, S^*x >< Y, T^*y >) = \\ &= < QS^*x, T^*y >=< TQS^*x, y > \end{aligned}$$

cioé $Cov(SX, TY) = TQS^*$.

□

Calcoliamo ora media e covarianza, supponendo che $0 \le t \le v$:

$$E[u_t] = E[S_t u_0] + \int_0^t S_{t-u} c \ du$$

$$\begin{aligned} Cov(u_t, u_v) &= Cov(S_t u_0 + \int_0^t S_{t-u}\sigma \ dW_u, S_v u_0 + \int_0^v S_{v-u}\sigma \ dW_u) = \\ &= Cov(S_t u_0, S_v u_0) + Cov(\int_0^t S_{t-u}\sigma \ dW_u, \int_0^t S_{v-u}\sigma \ dW_u) = \\ &= S_v Cov(u_0, u_0) S_t^* + \int_0^t (S_{t-u}\sigma) \otimes (S_{v-u}\sigma) \ du \end{aligned}$$

Abbiamo cosí dimostrato il seguente:

**Teorema 6.7** *: la soluzione dell'equazione (6.1) é un processo gaussiano, con media:*

$$E[u_t] = E[S_t u_0] + \int_0^t S_{t-u} c \ du$$

*e covarianza:*

$$Cov(u_t, u_v) = S_v Cov(u_0, u_0) S_t^* + \int_0^t (S_{t-u}\sigma) \otimes (S_{v-u}\sigma) \ du$$

□

Uno dei problemi che si presentano a volte é quello di trovare una misura per il processo che sia invariante per traslazioni temporali.

Chiamiamo $u_t(X)$ la soluzione dell'equazione avente dato iniziale $X$; definiamo poi le classi:

$$B_b(H) = \{\phi : H \to \mathbf{R} \mid \phi \text{ misurabile e limitata}\}$$
$$C_b(H) = \{\phi : H \to \mathbf{R} \mid \phi \text{ continua e limitata}\}$$
$$M^+(\mathcal{H}) = \{\mu \mid \mu \text{ misura positiva su } (H, \mathcal{H})\}$$
$$M_1^+(\mathcal{H}) = \{\mu \mid \mu \text{ misura di probabilità su } (H, \mathcal{H})\}$$

e gli operatori $P_t : B_b(H) \to B_b(H)$ tali che $\forall \phi \in B_b(H), \forall x \in H$:

$$(P_t\phi)(x) = E[\phi(u_t(x))]$$

Definiamo poi il nucleo $P : [0,T] \times H \times \mathcal{H} \to \mathbf{R}$ tale che, $\forall t \in [0,T], x \in H, B \in \mathcal{H}$:

$$P(t, x, B) = P_t\mathbf{1}_B(x) = E[\mathbf{1}_B(u_t(x))] = \mathcal{L}(u_t(x))(B)$$

Definiamo infine $P_t^* : M_1^+ \to M_1^+$ tale che $\forall \mu \in M_1^+, \forall B \in \mathcal{H}$:

$$(P_t^*\mu)(B) = \int_H P(t, x, B)\ d\mu(x)$$

se definiamo l'accoppiamento di dualitá tra $B_b(H)$ e $M_1^+(\mathcal{H})$:

$$< \phi, \mu >= \int_H \phi(x)\ d\mu(x)$$

allora abbiamo il:

**Lemma 6.8** *: $\forall \phi \in B_b(H), \forall \mu \in M_1^+(\mathcal{H})$:*

$$< P_t\phi, \mu >=< \phi, P_t^*\mu >$$

**Dimostrazione**: verifichiamo che la relazione vale $\forall \mathbf{1}_B, B \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} < P_t\mathbf{1}_B, \mu > &= \int_H P_t\mathbf{1}_B(x)\ d\mu(x) = \int_H P(t, x, B)\ d\mu(x) = \\ &= (P_t^*)(B) =< \mathbf{1}_B, P_t^* > \end{aligned}$$

siccome le indicatrici sono dense in $B_b(H)$, la relazione é vera $\forall \phi \in B_b(H)$.

□

Vediamo ora che gli operatori appena definiti danno una utile espressione della legge delle soluzioni:

**Proposizione 6.9** *: se $\mathcal{L}(X) = \nu$, allora $P_t^*\nu = \mathcal{L}(u_t(X))$, e $P_t^*\delta_x = \mathcal{L}(u_t(x))$*

**Dimostrazione**: $\forall B \in \mathcal{H}$ ho:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u_t(X))(B) &= \mathbf{P}\{u_t(X) \in B\} = E[\mathbf{1}_B(u_t(X))] = \int_H P_t\mathbf{1}_B(x)\ d\nu(x) = \\ &= < P_t\mathbf{1}_B, \nu >=< \mathbf{1}_B, P_t^*\nu >= (P_t^*\nu)(B)\end{aligned}$$

se $\mathcal{L}(X) = \delta_x$, allora $P_t^*\delta_x = \mathcal{L}(u_t(X)) = \mathcal{L}(u_t(x))$

□

**Corollario 6.10** *: $P_{t+s}^* = P_t^* \circ P_s^*$; $P_{t+s} = P_t \circ P_s$*

**Dimostrazione**: se pongo $\mathcal{L}(X) = \nu$, allora $P_t^* \circ P_s^*\nu = \mathcal{L}(u_t(u_s(X)))$; siccome l'equazione é autonoma, questa é uguale a $\mathcal{L}(u_{t+s}(X)) = P_{t+s}^*\nu$.
La seconda relazione si ricava banalmente dalla prima e dalla relazione di dualitá.

□

Diciamo che una misura $\nu \in M_1^+(\mathcal{H})$ é **invariante per traslazioni temporali**, o semplicemente **invariante**, se é invariante per gli operatori $P_t^*$, cioé se $\forall t \geq 0$ $P_t^*\nu = \nu$.

**Lemma 6.11** *: se $\exists \mu, \nu \in M_1^+$ tali che $P_t^*\mu \to^{deb.} \nu$, allora $\nu$ é invariante.*

**Dimostrazione**: se $P_t^*\mu \to^{deb.} \nu$, allora $\forall h > 0$ ho che $P_{t+h}^*\mu \to^{deb.} \nu$.
Allora $\forall \phi \in C_b(H, \mathbf{R})$:

$$< \phi, P_{t+h}^*\mu >=< P_h\phi, P_t^*\mu >$$

il primo membro tende a $< \phi, \nu >$, mentre il secondo tende a $< P_h\phi, \mu >=< \phi, P_h^*\mu >$, quindi $\nu = P_h^*\nu$ $\forall h > 0$.

□

**Corollario 6.12** *: se $\forall \mu \in M_1^+$ abbiamo che $P_t^*\mu \to^{deb.} \nu$, allora $\nu$ é l'unica misura invariante.*

□

Per verificare questa condizione é spesso utile la seguente:

**Proposizione 6.13** *: se $\exists \nu \in M_1^+$ tale che $\forall x \in H$ : $P_t^* \delta_x \to^{deb.} \nu$, allora $\forall \mu \in M_1^+$ ho che $P_t^* \mu \to^{deb.} \nu$, e quindi $\nu$ é l'unica misura invariante.*

**Dimostrazione**: $\forall \mu \in M_1^+$, $\forall \phi \in B_b(H)$ si ha che:

$$\begin{aligned} < \phi, P_t^* \mu > &= < P_t \phi, \mu >= \int_H P_t \phi(x)\ d\mu(x) = \int_H < P_t \phi, \delta_x >\ d\mu(x) = \\ &= \int_H < \phi, P_t^* \delta_x >\ d\mu(x) \to^{deb.} \int_H < \phi, \nu >\ d\mu =< \phi, \nu > \end{aligned}$$

□

Citiamo ora un teorema relativo a questo problema che ci sará utile in seguito. Chiamiamo $Q$ la covarianza del moto browniano, che nel nostro caso é uguale a $\sigma \otimes \sigma$.

**Teorema 6.14** *: se chiamo $Q_t = \int_0^t S_u Q S_u^*\ du$, ed é verificata la condizione:*

*1)* $\sup_{t \geq 0} \mathrm{Tr}\ (Q_t) < +\infty$

*e una delle due seguenti:*

*2) esiste una misura invariante $\nu$ per l'equazione:*

$$dz_t = (Az + c)\ dt$$

*3) se $c \in Im(A)$, ed esiste una misura invariante $\nu$ per l'equazione:*

$$dz_t = Az\ dt$$

*allora esiste una misura invariante per l'equazione (6.1), e in particolare:*

*- se (2) é soddisfatta, allora ogni misura invariante é della forma:*

$$\mu = \nu * N(0, Q_\infty)$$

*- se (3) é soddisfatta, allora ogni misura invariante é della forma:*

$$\mu = \nu * \delta_b * N(0, Q_\infty)$$

*dove $b \in D(A)$ é un vettore tale che $Ab = -c$.*

*Per una dimostrazione vedere Da Prato-Zabczyk[2].*