Capitolo 7

Fondamenti di Finanza Matematica

La Finanza Matematica ha lo scopo di studiare la corretta formalizzazione ed i calcoli legati allo scambio tra importi monetari pagabili in epoche diverse. Le problematiche legate a questa scienza sorgono da due fenomeni che accadono spesso nella realtá, e che vengono quindi assunti come postulati:

1) il possesso di un capitale (o di un qualsiasi bene il cui valore é esprimibile mediante un capitale) é vantaggioso, qualunque sia il suo importo; quindi ogni soggetto preferisce possedere un capitale che non possederlo, e ognuno tende a possedere piú capitale possibile. Per questo motivo un capitale viene rappresentato mediante un numero reale positivo o negativo a seconda che si possieda un capitale o che si abbia un debito.

2) la disponibilitá temporanea di un capitale proprio o altrui é un vantaggio, alla cui fruizione si puó associare un prezzo.

Questi sono i due capisaldi su cui si basa la Finanza Matematica. Ogni modello, deterministico o stocastico, che descriva scambi di denaro o di merci a cui si puó associare un prezzo, dovrá quindi tenere conto di questi due postulati.

Chiaramente, questi due postulati lasciano un'ampia libertá di scelta delle altre ipotesi da fare sul mercato (tempi discreti o continui, ambito deterministico o stocastico, e molte altre che verranno presentate in seguito). Noi non analizzeremo tutti i possibili modelli, ma ci limiteremo a presentare un modello deterministico, che servirá come esempio di possibili fenomeni che potranno avvenire, per poi passare ad un modello stocastico a tempi continui che é quello maggiormente usato per modellizzare i mercati finanziari.

7.1 Un primo modello deterministico

Presentiamo ora un semplice modello deterministico che soddisfa i due assiomi sopra citati, e che viene introdotto per capire meglio alcune notazioni ed ipotesi che dopo si useranno.

La struttura minima che consente di modellizzare scambi di denaro é della forma $\mathbf{R} \times T$, dove:

- **R** é l'insieme di tutte le possibili quantitá di denaro.

- T é un sottoinsieme della retta reale, chiamato **insieme dei tempi**. Gli insiemi dei tempi T piú usati sono di due tipi fondamentali: se T é un insieme discreto, si parla di **modello a tempo discreto**, mentre se T é un intervallo chiuso, si parla di **modello a tempo continuo**.

L'ammontare del costo del postulato (2) é chiamato **interesse**, ed é una funzione dell'importo che si ha a disposizione $X \in \mathbf{R}$ e degli istanti di inizio s e di fine t di tale disponibilitá (chiaramente si avrá $s, t \in T$, $s < t$).

A causa del secondo postulato, possedere lo stesso capitale X in due date differenti $s < t$ non é la stessa cosa, poiché, se lo si possiede all'istante s lo si puó ad esempio prestare e recuperare al tempo t, riscuotendo un interesse aggiuntivo. Per questo fatto, comunemente si associano agli importi le date di possesso corrispondenti, ottenendo la coppia ordinata $(X, t) \in \mathbf{R} \times T$, che si chiama **insieme degli importi datati**.

In virtú dei due postulati, possiamo indurre un ordinamento parziale $\succeq$ su $\mathbf{R} \times T$, che indichi una preferenza; in particolare, $(X, t) \succeq (Y, u)$ significa che (X, t) viene preferito (non strettamente) a (Y, s). Definiamo quindi la relazione:

1) se $X, Y \in \mathbf{R}, X < Y$, allora $(X, t) \preceq (Y, t)$ $\forall t \in T$
2) se $s, t \in T, s < t$, allora $(X, s) \preceq (X, t)$ $\forall X \geq 0$

Ora, il mercato sotto esame sará composto di diversi individui, il cui comportamento seguirá queste due regole, ma nei casi non contemplati potrá variare da soggetto a soggetto. Esaminiamo ora il possibile comportamento di un individuo razionale sul mercato, preoccupandoci poi di studiare come questi individui interagiscono tra di loro.

Possiamo rappresentare un **agente** presente sul mercato tramite una relazione che gode, oltre alle due proprietá sopracitate, anche delle seguenti:

3) se $(X, t) \preceq (Y, u)$ e $(Y, u) \preceq (Z, v)$, allora $(X, t) \preceq (Z, v)$ (**proprietá transitiva**)
4) $\forall (X, t), (Y, u) \in \mathbf{R} \times T$, si puó sempre dire se $(X, t) \preceq (Y, u)$ o viceversa (**proprietá di completezza**)

Una relazione che gode delle proprietá (3) e (4) si dice **relazione di preferenza**; poiché la relazione é completa, allora é anche riflessiva.

Esempio 7.1 *: se per una data relazione di preferenza esiste una funzione* $u : \mathbf{R} \times T \to \mathbf{R}$ *tale che* $(X, t) \preceq (Y, u) \iff u(X, t) \leq u(Y, u)$, *allora* u *viene chiamata* **funzione utilitá (di Von Neumann-Morgenstern)** *per la relazione di preferenza* $\preceq$*. Se la relazione verifica i punti (1) e (2), allora* u *sará crescente in* X*, e decrescente in* t $\forall X \geq 0$*. Se infine, fissato* $t \in T$*, la funzione* $X \to u(X, t)$ *é continua e tende a* $+\infty$ *per* $X \to +\infty$*, allora, se fissiamo* $s, t \in T$ *e* $X \in \mathbf{R}$*, possiamo sempre trovare un unico* $Y \in \mathbf{R}$ *tale che* $u(X, s) = u(Y, t)$*, e quindi possiamo sempre trovare* Y *tale che* (X, s) *é equivalente a* (Y, t)*.*

Piú in generale dico che la relazione $\preceq$ gode del **principio di equivalenza** se $\forall s, t \in T$ e $\forall X \in R$ esiste un unico $Y \in R$ tale che (X, s) é equivalente a (Y, t). Se succede questo, allora possiamo introdurre la seguente nomenclatura:

- se $s < t$, dico che Y é il **montante** in t relativo al capitale X valutato in s. L'**interesse** relativo a X, s e t verrá quindi ad essere $I = Y - X$.

- se $t < s$, dico che Y é il **valore scontato** o **valore anticipato** in t del capitale X valutato al tempo s. La quantitá $D = X - Y$, che comunemente si chiama **sconto**, corrisponde al capitale perso per effetto della valutazione in anticipo del capitale.

Se $t = 0$ (che in genere é l'istante di riferimento per le operazioni finanziarie), si indica X anche con il nome di **valore attuale**.

Al principio di equivalenza appena citato corrisponde, nell'interpretazione intuitiva, il seguente **principio di equivalenza finanziaria**:

É equivalente incassare (pagare) una somma X ad un tempo s invece di incassarla (pagarla) ad un tempo $t > s$, purché ci sia l'incasso (pagamento) aggiuntivo di una opportuna somma I che compensi tale differimento.

7.2 Leggi finanziarie

Dalla discussione relativa al principio di equivalenza si puó concludere che, se la relazione $\preceq$ gode del principio di equivalenza, possiamo definire una funzione $f : \mathbf{R} \times T^2 \to \mathbf{R}$ tale che $Y = f(X, s, t)$ se e solo se (X, s) é equivalente a (Y, t). Nel caso in cui definisco la f per $s < t$, Y é un montante, e si chiama la f **legge di capitalizzazione**; nel caso in cui, invece, definisco la f per $s > t$, Y é un capitale scontato, e la f si dice **legge di sconto**.

Generalmente si vuole che il montante o il valore scontato siano direttamente proporzionali al capitale investito. Per questo motivo in molte applicazioni la f é anche omogenea di primo grado rispetto ad X; questo implica che $(X, s) \preceq (Y, t) \iff (kX, s) \preceq (kY, t)\ \forall k \in \mathbf{R}^+$. In questo caso, inoltre, si puó determinare univocamente la f, semplicemente assegnandogli i valori per $X = 1$. Infatti ho che $f(X, s, t) = Xf(1, s, t)$; posso inoltre determinare la f in questo modo:

$$f(X, s, t) = \begin{cases} Xm(s, t) & \text{se } s < t \\ Xa(s, t) & \text{se } s > t \end{cases}$$

le funzioni $m : T^2 \to \mathbf{R}$ e $a : T^2 \to \mathbf{R}$ sono dette **fattori di scambio** ed in particolare m é detta **fattore di montante**, ed a **fattore di sconto**. Per la proprietá riflessiva di $\preceq$, ho che $m(t, t) = a(t, t) = 1\ \forall t \in T$.

Puó accadere (ma non é sempre cosí) che, se $s < t$ e $Y = f(X, s, t)$, allora $X = f(Y, t, s)$; quando ció succede, la relazione $<<$ gode della proprietá simmetrica, e dico che la f é una **legge simmetrica**. Se questo accade, allora é sufficiente specificare la f solo in $\{(s, t) \in T^2 \mid s < t\}$ (o nel complementare). Se f, oltre ad essere una legge simmetrica, é anche omogenea di primo grado, allora ho che $m(s,t)a(t,s) = 1\ \forall s,t \in T$, ed é quindi sufficiente specificare la f mediante uno solo dei due fattori di scambio.

Supponiamo ora di avere una legge finanziaria f omogenea di primo grado, e quindi univocamente determinata da m e da a. Supponiamo inoltre di voler impiegare un capitale secondo questa legge, dal tempo t al tempo $T = t + x$, per una durata x. Chiamo:

- **tasso di interesse (periodale) iniziale** la quantitá $m(t,T) - 1$, che é il tasso di interesse applicato dal tempo t al tempo T;

- **intensitá di interesse (periodale) iniziale** la quantitá:

$$\frac{m(t,t+x) - 1}{x}$$

che é la quantitá per cui moltiplicare la durata x per ottenere l'interesse applicato nel periodo da t a $t + x$.

Supponiamo ora di voler prolungare la durata dell'impiego del capitale, dal tempo T al tempo $T + h$; chiamo:

- **tasso di interesse di proseguimento** la quantitá:

$$\frac{m(t,T+h) - m(t,T)}{m(t,T)} = \frac{m(t,T+h)}{m(t,T)} - 1$$

che é l'interesse nel periodo da T a $T+h$, rapportato al fattore di montante dal tempo t al tempo T.

- **intensitá d'interesse di proseguimento** la quantitá:

$$\frac{m(t,T+h) - m(t,T)}{hm(t,T)}$$

che é il rapporto incrementale del fattore di montante rispetto all'istante finale al tempo T, rapportato al fattore di montante. Se questa quantitá é derivabile parzialmente rispetto all'istante finale, allora, siccome $m(t,T) > 0$, posso definire l'**intensitá istantanea di interesse** in $T = t + x$ di un impegno iniziato in t:

$$r(t,x) = \lim_{h \to 0} \frac{m(t,t+x+h) - m(t,t+x)}{hm(t,t+x)}$$

Allora:

$$r(t,x) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} m(t,t+x)}{m(t,t+x)} = \frac{\partial}{\partial x} \log m(t,t+x)$$

Lemma 7.2 : *il montante di proseguimento e l'intensitá istantanea di interesse sono legati da questa uguaglianza:*

$$\frac{m(t, T+h)}{m(t,T)} = \exp\left(\int_x^{x+h} r(t,u)\ du\right)$$

Dimostrazione: dalla definizione di $r(t,x)$ ricavo che:

$$\begin{aligned}\int_x^{x+h} r(t,u)\ du &= \int_x^{x+h} \frac{\partial}{\partial u}\log m(t,t+u)\ du = [\log m(t,t+u)]_x^{x+h} = \\ &= \log\frac{m(t,t+x+h)}{m(t,t+x)}\end{aligned}$$

da qui segue la tesi.

□

7.3 Analisi dimensionale delle grandezze finanziarie

Come per la Fisica, anche in Finanza si puó assegnare ad ogni grandezza una unitá di misura, avente una dimensione ben precisa. Si possono quindi definire, come in Fisica, **grandezze fondamentali** e **grandezze derivate**, cosí chiamate perché si possono far derivare da quelle fondamentali.

Le grandezze fondamentali in Finanza sono due:
- l'**importo** monetario $[I]$, che misura l'entitá di transizioni finanziarie; le unitá di misura usuali per un importo sono le monete di diversi Paesi (lira, dollaro, marco, ecc...) o loro multipli.
- il **tempo** $[t]$, usato per misurare le durate delle operazioni; unitá di misura usuali sono il giorno o l'anno

Alcune grandezze derivate sono:
- il **tasso** $[I.I^{-1}]$, definito come un importo diviso un importo (quindi un numero puro), che infatti si usa come fattore per passare da un importo ad un altro importo.
- il **flusso** $[I.t^{-1}]$, definito come un importo diviso per un tempo, che si usa per descrivere capitali che maturano in funzione del tempo.
- l'**intensitá** $[I.I^{-1}.t^{-1}]$, definita come un importo diviso un importo per un tempo, oppure come un tasso diviso un tempo, o come un flusso diviso un importo, che si usa per studiare la formazione di un capitale nel tempo rispetto ad un altro capitale.

Notiamo che, mentre nella Fisica vi sono sette grandezze fondamentali, e riunire tutte le possibili grandezze derivate in una tabella é praticamente impossibile, in Finanza le grandezze fondamentali sono solo due, ed é quindi possibile riunire le grandezze dimensionali (fondamentali e derivate) nella seguente tabella, rappresentandole secondo potenze decrescenti delle due unitá fondamentali:

$$\begin{array}{cccc} & t & t^0 & t^{-1} \\ I & --- & importo & flusso \\ I^0 & tempo & tasso & intensit\acute{a} \end{array}$$

Come per la Fisica, ogni volta che si discute una teoria finanziaria, bisogner´a stare attenti alle dimensioni delle grandezze studiate, controllando la loro coerenza in questa tabella.

7.4 Un modello deterministico di mercato obbligazionario

Vogliamo ora rivolgere la nostra attenzione ad un tipo particolare di mercato, che é quello dei titoli obbligazionari. Questo é ancora un modello deterministico, che peró contiene quasi tutte le ipotesi finanziarie che si fanno di solito su un mercato, e viene introdotto per meglio capire il modello piú generale che verrá presentato in seguito.

Un **titolo obbligazionario** (o piú semplicemente una **obbligazione**, che in inglese si indica con **bond**) é un contratto trasferibile in cui i due contraenti si impegnano a scambiarsi quantitá di denaro fissate in date diverse fissate. In particolare, l'agente che vende il contratto riceve un importo all'istante della vendita, ed eroga un altro importo, in una o piú date, al possessore del contratto. Tipicamente si indica con il nome di **emittente** l'ente che emette e vende il contratto, e **contraente** la persona (o l'ente) che ne viene in possesso. La parola **trasferibile** nella definizione significa che chi possiede una obbligazione é libero di venderlo a una terza persona in ogni istante in cui il titolo stesso sia valido; in questo caso il contratto rimarrá valido tra l'emittente e la terza persona, senza che il primo contraente sia piú coinvolto (a meno che, naturalmente, non ricompri il titolo).

A causa della trasferibilitá, una obbligazione ha un prezzo che evolve nel tempo.

In base ad un'altra caratteristica, si distinguono due tipi di titoli:

- titoli **a cedola nulla** (in inglese **zero coupon**): essi non garantiscono al contraente la riscossione di somme prima della scadenza del contratto. Un tipico esempio di titolo a cedola nulla é un Bot, che dá un utile solo al momento della sua scadenza.

- titoli **con cedola** (in inglese **coupon**): essi garantiscono al contraente la riscossione di somme di denaro prima della scadenza del contratto. Un esempio di titolo a cedola fissa é un Btp (Buono del Tesoro Poliennale), che ha durata pari a 3, 5, 7 o 10 anni e paga cedole semestrali.

Descriviamo ora il mercato in cui questi titoli vengono scambiati; le tre ipotesi tipiche che si fanno sui mercati, sono quelle di non frizionalitá, di competitivitá e di assenza di arbitraggi.

Un mercato si dice **non frizionale** se:

- non ci sono **costi di transazione** né **gravami fiscali**, cioé ogni compravendita di titoli non comporta costi né addebiti fiscali per nessuno dei due contraenti.

- i titoli sono **infinitamente divisibili**, cioé non ci sono limitazioni sulle quantitá minime o massime di titoli trattati.

- sono consentite **vendite allo scoperto** (in inglese **short sales**), é possibile cioé vendere titoli che non si possiedono.

- non c'é **rischio di insolvenza**; ció significa che ogni contratto sottostante ad un titolo verrá onorato sicuramente.

Per fare le altre due ipotesi, facciamo la convenzione che ogni volta che si parla di un importo, questo puó essere sotto forma di denaro o di un opportuno numero di obbligazioni, senza che una delle due forme sia preferita all'altra.

Un mercato si dice **competitivo** se ogni agente presente in esso :

- é un **massimizzatore di profitto**, cioé, a paritá di altre condizioni, preferisce una somma maggiore di denaro ad una somma minore.

- non ha la possibilitá di influenzare, con il solo suo comportamento, il prezzo dei titoli.

Definiamo infine il concetto di **arbitraggio**. Consideriamo una operazione finanziaria (X, t), di importi:

$$X = (X_0, ..., X_n)$$

non tutti nulli, esigibili ai tempi:

$$t = (t_0, ..., t_n)$$

tali che $t_{i-1} \leq t_i \; \forall i = 1, ..., n$. Diciamo che (X, t) é un **arbitraggio non rischioso**, o piú brevemente un **arbitraggio**, se $X_i \geq 0 \; \forall i$, e se $\exists i$ tale che $X_i > 0$. Ció significa che una delle due parti coinvolte nell'operazione ha la certezza di incassare almeno una volta senza dover mai pagare.

Un mercato si dice allora **esente da arbitraggi** se nessun agente ha la possibilitá di operare arbitraggi in esso.

Notiamo che in questo modello ci sono piú agenti; avevamo modellizzato un agente con una relazione di preferenza che coinvolge importi, la cui "appetibilitá" abbiamo supposto essere indipendente dalla forma in cui gli importi sono; dunque, ai fini della relazione di preferenza, é equivalente possedere una obbligazione o il suo prezzo in denaro ad un dato tempo. Possiamo allora definire una nuova relazione di preferenza in cui peró non compare piú solo un importo, ma un **portafoglio** di obbligazioni, cioé un vettore $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$, a componenti reali, in cui ciascuna componente é uguale alla quantitá del titolo corrispondente posseduta dall'agente (un numero negativo indicherá allora uno **scoperto**, cioé che é stata venduta una quantitá del titolo senza possederla).

Per definire la nuova relazione di preferenza $\preceq'$ per ogni agente del mercato, é sufficiente prendere quella giá esistente sugli importi datati, e definire:

$$(\theta, s) \preceq' (\theta', t) \iff (<\theta, Z_s>, s) \preceq (<\theta', Z_t>, t)$$

dove Z_s, Z_t sono i vettori dei prezzi dei titoli agli istanti s e t, e $< ., . >$ é il prodotto scalare su $\mathbf{R}^n$.

Sorge ora spontanea la domanda: ci possono essere sul mercato due agenti aventi due diverse relazioni di preferenza? La risposta, tenendo conto delle ipotesi di competitivitá, non frizionalitá e assenza di arbitraggi sul mercato, é no. Infatti, se esistessero due relazioni di preferenza $\preceq$ e $\preceq'$ diverse sul mercato, corrispondenti a due diversi agenti, un terzo agente potrebbe costruire un arbitraggio. In particolare, supponiamo che $s < t$ siano possibili tempi, e che $(X, s) \simeq (Y, t)$ e $(X, s) \simeq' (Y + Z, t)$, dove $Z > 0$. Costruiamo la seguente operazione:

1) al tempo s, prendiamo a prestito la somma X dal primo agente, e prestiamo la stessa quantitá al secondo;

2) al tempo t, restituiamo al primo la somma $X + \frac{1}{3}Z$, e chiediamo al secondo la somma $X + \frac{2}{3}Z$.

Notiamo che non abbiamo fatto l'ipotesi che gli agenti accettino ogni possibile transazione; tuttavia, siccome entrambi gli agenti ritengono che gli effetti dell'operazione che li riguardano siano vantaggiosi rispetto alla loro relazione di preferenza, entrambi accetteranno l'operazione (a rigore, essi preferiranno l'operazione presentatagli all'operazione nulla). Notiamo peró che siamo partiti con una somma nulla di denaro al tempo s, e ci troviamo con una somma pari a $\frac{1}{3}Z$ al tempo t. Questo é un arbitraggio, ed é quindi in contrasto con le ipotesi fatte sul mercato.

7.5 Obbligazioni a cedola nulla

Analizziamo ora un tipo particolare di obbligazione, cioé una obbligazione a cedola nulla.

Supponiamo di essere nell'istante s, e consideriamo un titolo obbligazionario che garantisce il pagamento di una unitá monetaria al tempo $t > s$ senza il pagamento di somme intermedie. Si tratta, quindi di una obbligazione a cedola nulla. Indichiamo con:

$$v(s, t), s < t$$

il **prezzo** del nostro titolo all'istante s.

Teorema 7.3 *: il prezzo del titolo $v(s, t)$ deve soddisfare le seguenti quattro proprietá:*

1) $v(s, t) > 0 \ \forall s \leq t$
2) $v(s, s) = 1$
3) $v(s, t) < 1 \ \forall s < t$
4) $v(s, t) > v(s, T) \ \forall s \leq t < T$

Dimostrazione: l'idea della dimostrazione, come molte dimostrazioni in Finanza, si basa sul fatto che, se una proprietá da provare fosse violata, si avrebbe un arbitraggio, quindi il mercato violerebbe i nostri postulati. Vediamo in dettaglio questo fatto.

Se $\exists s, t$ tali che $s < t$ e $v(s,t) \leq 0$, allora l'operazione:

$$(x,t) = \begin{pmatrix} -v(s,t) & 1 \\ s & t \end{pmatrix}$$

sarebbe un arbitraggio possibile sul mercato.

La seconda proprietá é valida per definizione di m.

La terza proprietá é giustificata dal postulato di rendimento del denaro.

Per dimostrare la quarta proprietá si procede come per la prima: se per assurdo esistono $s \leq t < T$ tali che $v(s,t) \leq v(s,T)$, allora costruisco la seguente operazione:

- all'istante s acquisto il titolo a scadenza t e vendo allo scoperto il titolo a scadenza T.

- all'istante t acquisto il titolo con scadenza T.

Gli effetti dell'operazione vengono allora descritti da:

$$(x,t) = \begin{pmatrix} -v(s,t) + v(s,T) & 1 - v(t,T) & 1 - 1 \\ s & t & T \end{pmatrix}$$

Siccome $1 - v(t,T) > 0$ per quanto dimostrato prima, se la quota $-v(s,t) + v(s,T)$ é non negativa, siamo in presenza di un arbitraggio. Siccome questo va contro i postulati del nostro mercato, la tesi deve essere verificata.

$\square$

Supponiamo sempre di essere nell'istante s, e consideriamo ora un titolo obbligazionario che garantisce il pagamento di una somma x al tempo $t > s$. Si tratta ancora di una obbligazione a cedola nulla, che si indica col nome di titolo dal **valore facciale** x. Indichiamo con:

$$V_x(s,t), s < t$$

il **prezzo** del nostro titolo all'istante s.

Teorema 7.4 *: se il titolo unitario dal prezzo $v(s,t)$ e il titolo dal valore facciale x, dal prezzo $V_x(s,t)$, sono entrambi presenti sul mercato, allora si ha:*

$$V_x(s,t) = xv(s,t)$$

Dimostrazione: ancora una volta procediamo per assurdo, sfruttando l'assenza di arbitraggi sul mercato. Suppongo che esistano s, t tali che $s < t$ e valga: $V_x(s,t) < xv(s,t)$. Allora costruisco l'operazione:

- all'istante t compro il titolo con valore facciale x e vendo allo scoperto x titoli unitari (cosa che posso sempre fare perché i titoli sono infinitamente divisibili).

Questa operazione provoca il flusso di cassa:

$$(y,t) = \begin{pmatrix} -V_x(s,t) + xv(s,T) & x - 1.x \\ s & t \end{pmatrix}$$

Se $V_x(s,t) < xv(s,t)$, allora si sarebbe in presenza di un arbitragio.

Per dimostrare che anche la disuguaglianza opposta é impossibile, si procede analogamente, costruendo l'operazione opposta.

□

7.6 Modello di Harrison - Kreps per i mercati

Rivolgiamo ora la nostra attenzione ad un modello di mercato non piú deterministico, ma in cui ci sono elementi di incertezza. Questo modello all'inizio conterrá solo due date in cui é possibile effettuare operazioni; inoltre l'unica operazione possibile sará la decisione su quanto denaro impiegare nel mercato nelle date in cui questo é consentito; per questo una generica operazione verrá chiamata **consumo** in questo contesto; un consumo negativo di denaro indicherá un ricavo.

Indichiamo inoltre la prima data con l'istante 0, che si identifica con il presente, e in cui si assume di conoscere con certezza il consumo; l'altra data con l'istante finale T, in cui ci sará un consumo aleatorio.

Presentiamo ora il modello usato per rappresentare questa situazione: prendiamo uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, dove:

- Ω rappresenta tutti gli stati possibili del mondo dal tempo 0 al tempo T;

- $\mathcal{F}$ rappresenta la quantitá di informazioni disponibili agli agenti del mercato;

- $\mathbf{P}$ é la misura di probabilitá che esprime l'indice di plausibilitá che un agente assegna ai diversi eventi nel mercato.

Notiamo che, mentre lo spazio e la σ-algebra sono gli stessi per tutti gli agenti, la $\mathbf{P}$ é diversa da agente ad agente, poiché ognuno avrá diverse opinioni di plausibilitá per gli eventi possibili; tuttavia, i diversi agenti dovranno avere delle $\mathbf{P}$ tali che:

- $N_{\mathbf{P}} = \{A \in \mathcal{F} \mid \mathbf{P}(A) = 0\}$ dovrá essere uguale per tutte le $\mathbf{P}$ dei diversi agenti, cioé gli eventi che si ritengono impossibili dovranno essere gli stessi per tutti;

- se $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}^*$ sono due misure relative a due agenti diversi, allora $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}^*)$. Infatti lo spazio $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sará collegato alle azioni che un agente puó intraprendere, e vogliamo che tutti gli agenti possano fare le stesse cose.

Ora vogliamo descrivere le decisioni di un agente; supporremo che ogni agente possa decidere quanto consumare con certezza al tempo 0 e quanto consumare al tempo T in dipendenza dallo stato del mondo. Chiamiamo allora $\mathbf{X} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, **consumo** al tempo T una variabile aleatoria $X \in \mathbf{X}$, e **piano di consumo** una coppia $(r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$. La scelta di $\mathbf{X}$ é una scelta tecnica, che faciliterá molte dimostrazioni. Notiamo che $\mathbf{R} \times \mathbf{X}$ é uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare indotto dalla norma:

$$\|(r, X)\|_{\mathbf{R}\times\mathbf{X}} = (|r|^2 + \|X\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Chiameremo poi

$$\mathbf{X}^+ = \{X \in \mathbf{X} \mid \mathbf{P}\{X \geq 0\} = 1, \mathbf{P}\{X > 0\} > 0\}$$

e diremo che un piano di consumo (r, X) é **positivo**, scrivendo $(r, X) > 0$, se $r > 0$ e $X \in \mathbf{X}^+$.

Modellizziamo ora un agente sul mercato, identificandolo, come abbiamo fatto prima, con una relazione di preferenza. In questo caso vogliamo che l'agente non faccia solo una scelta relativa ad un singolo consumo, ma vogliamo che scelga una strategia, cioé un piano che gli dica quanto consumare in ogni istante in cui puó. Per questo motivo, l'insieme dei tempi sparisce dagli argomenti della relazione di preferenza (essendo giá implicito nel fatto che ci sono due consumi e due date di consumo), e la relazione viene data sull'insieme di tutti i possibili consumi.

Un **agente** é una relazione binaria di preferenza $\preceq$ (che leggeremo **é preferito a**) su $\mathbf{R} \times \mathbf{X}$ tale che:

- é **convessa**, cioé $\forall (r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$ l'insieme:

$$\{(r', X') \in \mathbf{R} \times \mathbf{X} \mid (r', X') \succeq (r, X)\}$$

é convesso.

- é **continua**, cioé $\forall (r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$ gli insiemi:

$$\{(r', X') \in \mathbf{R} \times \mathbf{X} \mid (r', X') \succeq (r, X)\}$$
$$\{(r', X') \in \mathbf{R} \times \mathbf{X} \mid (r', X') \preceq (r, X)\}$$

sono chiusi nella topologia di $\mathbf{R} \times \mathbf{X}$.

- é **strettamente monotona**, cioé $\forall (r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$, $\forall r' > 0, X' \in \mathbf{X}^+$, ho che $(r, X + X') \succ (r, X)$ e $(r + r', X) \succ (r, X)$

Mentre le ipotesi di convessitá e di continuitá sono ipotesi tecniche, l'ipotesi di stretta monotonia traduce il fatto che un agente del mondo reale preferisca poter consumare di piú a poter consumare di meno.

Nell'insieme di tutti i possibili consumi $\mathbf{X}$, supponiamo che esista un suo sottospazio vettoriale M, ad ogni elemento X del quale possiamo associare il prezzo che l'agente é disposto a pagare al tempo 0 per usufruire del consumo X al tempo T. Chiamiamo allora **sistema di prezzi** una coppia (M, π), dove M é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{X}$, e $\pi : M \to \mathbf{R}$ é un funzionale lineare. Possiamo allora interpretare la somma $r + \pi(X)$ come il costo del piano di consumo (r, X).

Diciamo che un sistema di prezzi (M, π) é **ammissibile** (in inglese **viable**) rispetto all'agente $\succeq$ se esiste un piano di consumo (r', X') tale che:
- $r' + \pi(X') \leq 0$ (**vincolo di bilancio**)
- $\forall (r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$ tale che $r + \pi(X) \leq 0$, risulta $(r', X') \succeq (r, x)$ (**ottimalitá**)

La prima condizione si puó interpretare, supponendo che l'agente non abbia a disposizione altra ricchezza se non quella che si puó procurare agendo sul mercato, e che quindi non possa decidere di consumare indefinitamente, ma che abbia un vincolo, dato dalla prima condizione; la seconda significa che tra tutti piani di consumo realisticamente attuabili, (r', X') é quello che soddisfa maggiormente l'agente.

Diamo ora un teorema che ci consente di caratterizzare un mercato ammissibile rispetto al funzionale π. Ricordiamo che un funzionale $\pi : \mathbf{X} \to R$ si dice **positivo** se $\forall X \in \mathbf{X}^+, \pi(X) > 0$.

Definiamo inoltre l'insieme:

$$\Psi = \{\psi : \mathbf{X} \to \mathbf{R} \mid \psi \text{ lineare, continuo e positivo}\}$$

Per dimostrare il teorema useremo il seguente teorema di separazione, che é una conseguenza del teorema di Hahn-Banach:

Teorema 7.5 *: se X é uno spazio vettoriale topologico, H un cono convesso in X contenente lo 0, G un aperto convesso di X tali che $G \cap H = \emptyset$, allora esiste un funzionale $\psi \in X^*$ tale che $\psi(h) \leq 0 \ \forall h \in H$ e $\psi(g) > 0 \ \forall g \in G$.*

□

Teorema 7.6 *: dato un sistema di prezzi (M, π), allora esiste un agente $\preceq$ per cui (M, π) é ammissibile se e solo se esiste $\psi \in \Psi$ tale che $\psi|_M = \pi$.*

Dimostrazione: $\Leftarrow$) Supponiamo che esista $\psi \in \Psi$ tale che $\psi|_M = \pi$; costruiamo allora un agente $\preceq$ in questo modo: se $(r, X), (r', X') \in \mathbf{X}$, allora dico che $(r, X) \preceq (r', X')$ se $r + \psi(X) \leq r' + \psi(X')$. Allora questa relazione é transitiva e completa, poiché lo é anche $\leq$ su $\mathbf{R}$, quindi é una relazione di preferenza; verifichiamo che é convessa, continua e strettamente crescente. Per farlo definiamo gli insiemi:

$$H_{(r,X)} = \{(r', X') \mid (r', X') \succeq (r, X)\} = \{(r', X') \mid r' + \psi(X') \geq r + \psi(X)\}$$

$$G_{(r,X)} = \{(r', X') \mid (r', X') \preceq (r, X)\} = \{(r', X') \mid r' + \psi(X') \leq r + \psi(X)\}$$

Verifichiamo che $\succeq$ é convessa: $\forall (r', X'), (r'', X'') \in H_{(r,X)}$, $\forall \lambda \in [0,1]$ ho che:

$$\begin{aligned} \lambda r' + (1-\lambda) r'' + \psi(\lambda X' + (1-\lambda) X'') &= \lambda (r' + \psi(X')) + (1-\lambda)(r'' + \psi(X'')) \geq \\ &\geq \lambda (r + \psi(X)) + (1-\lambda)(r + \psi(X)) = \\ &= r + \psi(X) \end{aligned}$$

quindi $\lambda (r', X') + (1-\lambda)(r'', X'') \in H_{(r,X)}$, e $\succeq$ é convessa.

Verifichiamo che $\succeq$ é continua: a questo scopo definisco il funzionale $\tilde{\psi} : \mathbf{R} \times \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ in questo modo: $\tilde{\psi}(r, X) = r + \psi(X)$; allora $\tilde{\psi}$ é lineare e continua; allora gli insiemi:

$$H_{(r,X)} = \tilde{\psi}^{-1}([r + \psi(X), +\infty))$$
$$G_{(r,X)} = \tilde{\psi}^{-1}((-\infty, r + \psi(X)])$$

sono controimmagini di chiusi di $\mathbf{R}$, quindi chiusi, perció $\succeq$ é continua.

Verifichiamo infine che $\succeq$ é strettamente monotona: $\forall (r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}, \forall r' > 0, X' \in \mathbf{X}^+$, ho che $r + r' + \psi(X) > r + \psi(X)$; inoltre, poiché ψ é positivo, $\psi(X') > 0$, quindi $r + \psi(X + X') > r + \psi(X)$, quindi $\succeq$ é strettamente monotona.

Fin qui abbiamo dimostrato che $\succeq$ é un agente. Dobbiamo ora mostrare che esiste $(r^*, X^*) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$ ammissibile e ottimo per $\succeq$. Pongo $(r^*, X^*) = (0, 0)$; allora $(0, 0)$ é ammissibile, e $\forall (r, X) \in \mathbf{R} \times M$ tale che $r + \psi(X) \leq 0$, ho che $r + \psi(X) \leq 0 + 0 = 0 + \psi(0)$, quindi $(r, X) \leq (0, 0)$. Se chiamo $\pi = \psi|_M$, allora (M, π) é un sistema di prezzi ammissibile, e ho la tesi.

$\Rightarrow$) Supponiamo di avere un sistema di prezzi (M, π) ammissibile per l'agente $\succeq$. Ció significa che $\exists (r^*, X^*) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$ ammissibile ed ottimo; non é restrittivo supporre che $(r^*, X^*) = (0, 0)$. Definiamo ora:

$$G = \{(r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X} \mid (r, X) \succ (0, 0)\} \text{ insieme dei piani piú che ottimi}$$

$$H = \{(r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X} \mid r + \pi(X) < 0\} \text{ insieme dei piani ammissibili}$$

Notiamo che $G \cap H = \emptyset$, H é un cono convesso, G é un aperto in $\mathbf{R} \times \mathbf{X}$ (poiché é il complementare di un chiuso), ed é un convesso. Per provare questo, costruisco gli insiemi:

$$G_n = \left\{ (r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X} \;\mid\; (r, X) \succeq \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \right\}$$

Allora gli insiemi G_n sono convessi, e sono tutti contenuti in G (infatti $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \succ (0, 0)$); inoltre, $G_n \subset G_{n+1}$ $\forall n$ (infatti $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \succ \left(\frac{1}{n+1}, 0\right)$); infine, $G \subseteq \cup_1^{\infty}{}_n G_n$; infatti, supponiamo per assurdo che $\exists (r, X) \in G$ tale che $(r, X) \notin G_n$ $\forall n$; allora $(r, X) \not\succeq (\frac{1}{n}, 0)$ $\forall n$, e quindi, siccome $\succeq$ é completa, $(r, X) \preceq (\frac{1}{n}, 0)\ \forall n$. Siccome l'insieme $C = \{(r', X') | (r, X) \preceq (r', X')\}$ é chiuso in $\mathbf{R}\times\mathbf{X}$, e $(\frac{1}{n}, 0) \in C\ \forall n$, allora anche $\lim(\frac{1}{n}, 0) = (0, 0) \in C$, quindi $(r, X) \preceq (0, 0)$, cioé $(r, X) \notin G$, che é assurdo. Abbiamo provato che $G = \cup_1^\infty{}_n G_n$; siccome i G_n sono tutti convessi, anche G é convesso.

Possiamo allora applicare il teorema di separazione citato prima del teorema, e trovare un funzionale $\phi : \mathbf{R} \times \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ lineare e continuo tale che $\forall (r, X) \in G : \phi(r, X) > 0$ e $\forall (r, X) \in H : \phi(r, X) \leq 0$. Poiché $(1, 0) \in G$, allora $\phi(1, 0) > 0$, e possiamo definire un nuovo funzionale $\phi' : \mathbf{R} \times \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ in questo modo:

$$\phi'(r, X) = \frac{\phi(r, X)}{\phi(1, 0)}\ \forall (r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$$

Allora $\forall (r, X) \in G : \phi'(r, X) > 0$, $\forall (r, X) \in H : \phi'(r, X) \leq 0$, e $\phi'(1, 0) = 1$. Inoltre, poiché ϕ' é lineare, abbiamo:

$$\phi'(r, X) = r\phi'(1, 0) + \phi'(0, X) = r\phi'(1, 0) + \phi'(0, X)$$

Definiamo infine $\psi : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ come $\psi(X) = \phi'(0, X)$. Allora ψ é il funzionale cercato. Infatti é lineare e continuo per costruzione; inoltre ψ é positivo; infatti, se $X \in \mathbf{X}^+$, allora $(0, X) \succ (0, 0)$ per la stretta monotonia di $\succeq$, quindi $(0, X) \in G$ e $\psi(X) = \phi'(0, X) > 0$.

Bisogna solo dimostrare che $\psi|_M = \pi$. Per fare questo, notiamo che $\forall m \in M$:

$$(-\pi(m), m) \in H \Rightarrow \phi'(-\pi(m), m) \leq 0 \Rightarrow \psi(m) \leq \pi(m)$$
$$(\pi(m), -m) \in H \Rightarrow \phi'(\pi(m), -m) \leq 0 \Rightarrow \pi(m) \leq \psi(m)$$

quindi $\pi(m) = \psi(m)$, e questo dimostra la tesi.

Supponiamo ora di avere un sistema ammissibile di prezzi (M, π). Ci chiediamo se e sotto quali condizioni possiamo assegnare un prezzo ad un consumo $X \in \mathbf{X} \setminus M$. Diciamo che il prezzo p per X é **consistente** con (M, π) se, chiamati $M' = \{m + aX \mid m \in M, a \in \mathbf{R}\}$ e $\pi' : M' \to \mathbf{R}$ tale che $\pi'(m + aX) = \pi(m) + ap$, il sistema (M', π') é ammissibile.

□

Corollario 7.7 : *fissato $X \in \mathbf{X} \setminus M$, allora p é un prezzo consistente per X se e solo se $\exists \psi \in \Psi$ tale che $\psi|_M = \pi$ e $\psi(X) = p$.*

Corollario 7.8 : *se un sistema di prezzi (M, π) é ammissibile, allora $\forall X \in \mathbf{X} \setminus M$ esiste almeno un prezzo p consistente con (M, π).*

Questo corollario ci garantisce l'esistenza di un prezzo p consistente con (M, π) per ogni $X \in \mathbf{X}$, ma non la sua unicitá. Infatti, se considero l'insieme:

$$\Pi(X) = \{\psi(X) | \psi \in \Psi, \psi|_M = \pi\}$$

allora $\Pi(X)$ é un convesso di $\mathbf{R}$. Infatti, se $\psi, \psi' \in \Psi$ e $\psi|_M = \psi'|_M = \pi$, allora $\forall \lambda \in [0,1]$ abbiamo che $\lambda\psi + (1-\lambda)\psi' \in \Psi$ e $(\lambda\psi + (1-\lambda)\psi')|_M = \pi$, quindi:

$$(\lambda\psi + (1-\lambda)\psi')(X) = \lambda\psi(X) + (1-\lambda)\psi'(X) \in \Pi(X)$$

Poiché $\Pi(X)$ é un convesso di $\mathbf{R}$, allora é un intervallo. Niente peró ci assicura che $\Pi(X) = \{p\}$. Se questo succede (o se $X \in M$), diciamo che X é **prezzato per arbitraggio**, e p é il **prezzo per arbitraggio** di X. Il nome non é stato scelto a caso: se infatti esistessero due prezzi diversi per un consumo al tempo T, si potrebbe costruire la semplice strategia di arbitraggio:

- al tempo 0 compra al prezzo minore e vendi al prezzo maggiore

realizzando cosí un ricavo certo. Dire che un titolo é prezzato per arbitraggio, allora, significa dire che vi é un unico prezzo per cui non sono possibili arbitraggi comprendenti quel titolo.

Costruiamo ora l'insieme:

$$\hat{M} = \{X \in \mathbf{X} | X \text{ é prezzato per arbitraggio}\}$$

$\hat{M}$ é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{X}$, tale che $\overline{M} \subseteq \hat{M}$. Definisco inoltre il funzionale $\hat{\pi} : \hat{M} \to \mathbf{R}$ dato da:

$$\hat{\pi}(X) = \begin{cases} \pi(X) & \text{se } X \in M \\ \text{l'unico elemento di } \Pi(X) & \text{se } X \notin M \end{cases}$$

Lemma 7.9 *: se (M, π) é un sistema di prezzi ammissibile, anche $(\hat{M}, \hat{\pi})$ lo é.*

Dimostrazione: se (M, π) é un sistema di prezzi ammissibile, allora $\exists \psi \in \Psi$ tale che $\psi|_M = \pi = \hat{\pi}|_M$; allora, se $X \in \hat{M} \setminus M$, allora $\psi(X) \in \Pi(X) = \{\hat{\pi}(X)\}$, e quindi $\psi|_{\hat{M}} = \pi$, quindi $(\hat{M}, \hat{\pi})$ é ammissibile.

□

Corollario 7.10 *: se (m, π) é un sistema di prezzi ammissibile, allora $\hat{M}$ é un sottospazio chiuso di $\mathbf{X}$.*

Dimostrazione: se X appartiene alla chiusura di $\hat{M}$, allora esiste una successione X_n di elementi di $\hat{M}$ tale che $X_n \to X$; allora, $\forall \psi \in \Psi$ tale che $\psi|_{\hat{M}} = \hat{\pi}$, abbiamo che:

$$\psi(X) = \lim_{n\to\infty} \psi(X_n) = \lim_{n\to\infty} \hat{\pi}(X_n)$$

non dipende dal particolare ψ preso; quindi il consumo X ha un solo prezzo, uguale a $\psi(X)$ e indipendente dalla particolare scelta di ψ, quindi é prezzato per arbitraggio.

$\square$

Facciamo ora un esempio concreto di mercato.

7.7 Introduzione ai mercati finanziari

Vogliamo ora rivolgere la nostra attenzione ad un tipo particolare di mercato, comprendente, oltre alle obbligazioni, anche altri tipi di titoli, che é quello dei titoli borsistici. Un **titolo borsistico** (chiamato piú generalmente **titolo**) é un contratto trasferibile stipulato da due contraenti; tipicamente si indica con il nome di **emittente** l'ente che emette e vende il contratto, e **contraente** la persona (o l'ente) che ne viene in possesso.

Anche in questo caso, a causa della trasferibilitá, un titolo ha un prezzo che evolve nel tempo, ma la cui evoluzione non é piú certa, ma é aleatoria. A seconda del tipo di titolo, si hanno dei nomi particolari:

- si chiama obbligazione (in inglese **bond**) un contratto in cui due parti si impegnano a scambiarsi quantitá di denaro fissate in date diverse fissate. Il prezzo di una obbligazione dipende tipicamente solo dal tasso di interesse (che puó essere fissato a priori, o **indicizzato**, cioé dipendente da altre quantitá). Una tipica obbligazione é un titolo di Stato a tasso fisso (Bot, Btp sul mercato italiano) o indicizzato (Cct, Ctz sul mercato italiano), o un analogo titolo emesso da una banca.

- si chiama **azione** (in inglese **stock**) un contratto che garantisce la proprietá di una quota (generalmente molto piccola) di un'impresa quotata in borsa. Il prezzo di una azione dipende tipicamente da molti fattori aleatori.

A causa di questa distinzione, si dice spesso che le obbligazioni sono i titoli dal ricavo certo, e le azioni sono i titoli dal ricavo aleatorio. In realtá il tasso di interesse da cui dipende una obbligazione puó essere aleatorio, rendendo il prezzo dell'obbligazione aleatorio. Vedremo peró che la differente natura tra azioni e obbligazioni sará evidente nel modello che presenteremo, in quanto l'evoluzione dei prezzi dei due titoli saranno descritti da equazioni di tipo diverso.

In base ad un'altra caratteristica, si distinguono inoltre due tipi di titoli:

- titoli **a cedola nulla** (in inglese **zero coupon**): essi non garantiscono al contraente la riscossione di somme prima della scadenza del contratto. Un tipico esempio di titolo a cedola nulla é un Bot, che dá un utile solo al momento della sua scadenza.

- titoli **con cedola** (in inglese **coupon**): essi garantiscono al contraente la riscossione di somme di denaro prima della scadenza del contratto. Un tipico esempio di titolo a cedola fissa é una azione, che di solito consente la riscossione, in periodi fissati, di una somma aleatoria, chiamata **dividendo**, che é una parte del profitto dell'impresa che ha emesso l'azione.

Descriviamo ora il mercato in cui questi titoli vengono scambiati; le tre ipotesi tipiche che si fanno sui mercati, sono quelle di non frizionalitá, di competitivitá e di assenza di arbitraggi.

La definizione di mercato **non frizionale** rimane la stessa che abbiamo dato nel caso deterministico.

Un mercato si dice **competitivo** se ogni agente presente in esso :
- non ha la possibilitá di influenzare, con il solo suo comportamento, il prezzo dei titoli.
- é un **massimizzatore di profitto**, cioé, a paritá di altre condizioni, preferisce una somma maggiore di denaro ad una somma minore, quando questa condizione sia certa (o abbia probabilitá 1; ricordiamo che in questo modello, le somme di denaro non sono piú certe, ma aleatorie). In casi di indecisione non diamo qui un criterio di scelta, poiché la letteratura é ricca di diversi esempi di criteri di scelta (esempi di possibili criteri sono massimizzare la speranza, massimizzare la speranza di una particolare funzione, minimizzare la varianza tenendo la speranza fissa; ognuno di questi ha motivazioni diverse e porta a conseguenze diverse).

Definiamo infine il concetto di **arbitraggio** nel caso da noi considerato. Consideriamo una operazione finanziaria (X, t), di importi:

$$X = (X_0, ..., X_n)$$

non tutti nulli, esigibili ai tempi:

$$t = (t_0, ..., t_n)$$

tali che $t_{i-1} \leq t_i \ \forall i = 1, ..., n$, in cui peró X non é piú un vettore reale, ma é un vettore aleatorio. Diciamo che (X, t) é un **arbitraggio non rischioso**, o piú brevemente un **arbitraggio**, se $X_i \geq 0 \ \forall i$ $\mathbf{P}$-quasi certamente, e c'é almeno una operazione X_i tale che $\mathbf{P}\{X_i > 0\} > 0$. Ció significa che una delle due parti coinvolte nell'operazione ha la certezza di incassare almeno una volta senza dover mai pagare.

Un mercato si dice allora **esente da arbitraggi** se nessun agente ha la possibilitá di operare arbitraggi in esso.

7.8 Obbligazioni a cedola nulla: caso stocastico

Supponiamo di essere nell'istante s, e consideriamo una obbligazione a cedola nulla che garantisce il pagamento di una unitá monetaria al tempo $t > s$. Indichiamo con:

$$v(s,t), s < t$$

il **prezzo** del nostro titolo all'istante s. Notiamo che il valore finale del titolo é fissato. Noi supporremo peró che il prezzo possa avere delle variazioni aleatorie. Volendo fornire una spiegazione qualitativa, queste variazioni dipenderanno dal fatto che, per uno stesso tempo t, in un certo stato del mondo sará preferibile possedere del denaro in quell'istante piuttosto che una obbligazione; in altri stati, il bisogno potrebbe non essere cosí pressante, e quindi l'obbligazione avrá un valore piú alto.

Teorema 7.11 *: le variabili aleatorie $v(s,t)$, che esprimono il prezzo del titolo, devono soddisfare le seguenti quattro proprietá:*

1) $v(s,t) > 0 \ \forall s \leq t$ $\mathbf{P}$-q.c.
2) $v(s,s) = 1\mathbf{P}$-q.c.
3) $v(s,t) < 1 \ \forall s < t\mathbf{P}$-q.c.
4) $v(s,t) > v(s,T) \ \forall s \leq t < T\mathbf{P}$-q.c.

Dimostrazione: la dimostrazione del teorema é identica al caso deterministico, salvo per il fatto che la definizione di arbitraggio é diversa: per ovviare a questo problema, si fa notare che, se esistesse un evento non trascurabile in cui una di quelle proprietá fosse violata, allora si potrebbe costruire una strategia di arbitraggio mediante le costruzioni date nel caso deterministico.

□

Supponiamo sempre di essere nell'istante s, e consideriamo ora un titolo obbligazionario che garantisce il pagamento di una somma x al tempo $t > s$. Si tratta ancora di una obbligazione a cedola nulla, che si indica col nome di titolo dal **valore facciale** x. Indichiamo con:

$$V_x(s,t), s < t$$

il **prezzo** del nostro titolo all'istante s. Ancora una volta avremo un prezzo aleatorio.

Teorema 7.12 *: se il titolo unitario dal prezzo $v(s,t)$ e il titolo dal valore facciale x, dal prezzo $V_x(s,t)$, sono entrambi presenti sul mercato, allora si ha:*

$$V_x(s,t) = xv(s,t) \ \mathbf{P} - \text{q.c.}$$

Dimostrazione: la dimostrazione sfrutta lo stesso ragionamento del teorema precedente e la stessa costruzione dell'analogo caso deterministico.

□

7.9 Un modello stocastico per i mercati finanziari

Presentiamo ora un modello per i mercati finanziari. Questa volta supponiamo di avere non piú due date 0 e T, ma date variabili in $[0, T]$, che é ora il nostro insieme dei tempi, in cui possono avvenire gli scambi. Supponiamo inoltre che i beni scambiati sul mercato siano $d+1$ titoli, dal prezzo conosciuto istante per istante, di cui uno (il titolo 0) é una obbligazione, e gli altri d sono titoli azionari. Supponiamo inoltre che in $[0, T]$ non ci siano date in cui vengono pagati dei dividendi. Supponiamo infine che il mercato goda delle ipotesi di non frizionalitá, competitivitá e di assenza di arbitraggi fatte prima.

Lo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ rappresenta ancora lo stato del mondo e le informazioni che un agente assegna con probabilitá $\mathbf{P}$ al mondo. Tuttavia, le informazioni non sono conosciute tutte subito dall'agente, ma gli si rivelano man mano; per rappresentare questo fatto faremo uso di una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, tale che la $\sigma-$algebra $\mathcal{F}_t$ rappresenti le informazioni conosciute dall'agente al tempo t. Supponiamo inoltre che i prezzi dei $d + 1$ titoli siano rappresentati dal processo $Z(t) = (Z_0(t), ..., Z_d(t))$, adattato a $(\mathcal{F}_t)_t$ e con $Z_k(t) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})\ \forall t \in [0, T], k = 0, ..., d$.

Chiamiamo allora **modello di mercato** uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, dotato di un processo $(Z(t))_t$ adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$, con le caratteristiche sopra citate.

Supponiamo infine che il prezzo dell'obbligazione Z_0 sia identicamente uguale a 1. Quest'ultima ipotesi é un'ipotesi di comodo, che, come vedremo, verrá indebolita di parecchio nel seguito.

Gli agenti possono agire sul mercato decidendo di volta in volta quanto acquistare o vendere di ciascun titolo. Piú precisamente, chiamiamo $\theta_k(t)$ la quantitá di titolo $k-$esimo posseduta dall'agente al tempo t. Allora chiamo **strategia semplice di compravendita** un processo $(\theta(t))_t = (\theta_0(t), ..., \theta_d(t))_t$ adattato a $(\mathcal{F}_t)_t$, tale che $\theta(t).Z(t) \in L^2\ \forall t \in [0, T]$, e del tipo:

$$\theta(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \theta_i.\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}$$

con $\theta_i \mathcal{F}_{t_i}$-misurabile e $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$, rappresentante la quantitá totale di titoli posseduta dall'agente, chiamata anche **portafoglio** posseduto dall'agente (da ora in poi, il puntino indicherá sempre il prodotto scalare euclideo in $\mathbf{R}^n$).

Il fatto che la strategia sia adattata a $(\mathcal{F}_t)_t$ significa che l'agente puó **ricalibrare** il proprio portafoglio, cioé cambiarne il contenuto, in base alle informazioni ricevute fino al tempo t in cui si trova.

con $\theta_i \mathcal{F}_{t_i}$-misurabile e $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$. Notiamo che in questo caso l'agente puó ricalibrare il proprio portafoglio in un insieme finito e deterministico di date. Questo tipo di strategia é restrittivo, poiché non permette l'uso di tempi di arresto, tuttavia ci sará utile nel seguito.

Chiamiamo $\theta(t^-) = \lim_{u \to t^-} \theta(u)$ (che esiste sempre poiché $(\theta(t))_t$ é cádlág). Allora, se $(\theta(t))_t$ é una strategia semplice, avremo che $\theta(t_i^-) = \theta(t_{i-1})$.

Chiamiamo **valore di mercato** del portafoglio all'istante t la quantitá $\theta(t).Z(t)$.

Diciamo che una strategia $(\theta(t))_t$ é **autofinanziante** se il suo valore di mercato immediatamente prima dell'istante t é uguale al suo valore all'istante t, cioé:

$$\theta(t^-).Z(t) = \theta(t).Z(t) \ \forall t \in [0, T]$$

Dire che una strategia é autofinanziante significa allora che ogni ricalibratura del portafoglio deve essere fatta sfruttando esclusivamente le risorse interne del portafoglio stesso, e che non é possibile mettere o togliere titoli dall'esterno in altro modo, eccetto alle date 0 e T. Notiamo che il valore di mercato immediatamente prima dell'istante t viene calcolato usando i prezzi in t. Questo perché l'agente decide le proprie azioni al tempo t, e deve quindi usare i prezzi in t e il portafoglio posseduto immediatamente prima.

Definiamo ora un tipo particolare di arbitraggio, che verrá largamente usato in seguito. Chiamiamo **pasto gratis semplice** (in inglese **simple free lunch**) una strategia semplice autofinanziante tale che $\theta(0).Z(0) \leq 0$ e $\theta(T).Z(T) \in \mathbf{X}^+$. L'esistenza di pasti gratis semplici nel mercato é quindi incompatibile con l'ipotesi di assenza di arbitraggi da noi fatta all'inizio.

Ci poniamo ora il problema: dato un consumo $X \in \mathbf{X}$, é possibile trovare una strategia semplice autofinanziante $(\theta(t))_t$ tale che $\theta(T).Z(T) = X$? Se questo accade, diciamo che X é **acquistabile** al tempo 0; diciamo inoltre che $(\theta(t))_t$ **genera** X (o anche **replica** o **simula**), e che $\theta(0).Z(0)$ (che, poiché $\mathcal{F}_0$ é la $\sigma-$algebra banale, é una costante) é un prezzo di X al tempo 0. Per ora, infatti, niente ci assicura che per un titolo acquistabile non ci siano due diverse strategie che lo generano, con due prezzi diversi per X al tempo 0.

Lemma 7.13 : *se nel modello di mercato non ci sono pasti gratis semplici, allora ogni consumo $X \in \mathbf{X}$ acquistabile al tempo 0 ha un unico prezzo.*

Dimostrazione: supponiamo per assurdo che esistano due strategie autofinanzianti θ e θ', tali che $\theta(0).Z(0) < \theta'(0).Z(0)$ che simulano X. Definiamo allora la strategia $\theta''(t) = \theta(t) - \theta'(t)$. Allora θ'' é semplice, (tale che $\theta''(t^-) = \theta(t^-) - \theta'(t^-)$ e autofinanziante; infatti:

$$\begin{aligned} \theta''(t^-).Z(t) &= (\theta(t^-) - \theta'(t^-)).Z(t) = \theta(t^-).Z(t) - \theta'(t^-).Z(t) = \\ &= \theta(t).Z(t) - \theta'(t).Z(t) = \theta''(t).Z(t) \end{aligned}$$

Risulta inoltre che:

$$\theta''(0).Z(0) = \theta(0).Z(0) - \theta'(0).Z(0) < 0$$

$$\theta''(T).Z(T) = \theta(T).Z(T) - \theta'(T).Z(T) = X - X = 0$$

Siamo allora in presenza di un arbitraggio, che peró non é ancora un pasto gratis semplice. Possiamo peró modificarlo in questo modo:

$$\theta'''(t) = \theta''(t) - (\theta''(0).Z(0))(1, 0, ..., 0) = (\theta_0''(t) - \theta''(0).Z(0), \theta_1(t), ..., \theta_d(t))$$

Ricordando che $Z_0(t) = 1 \ \forall t \in [0, T]$, deduciamiamo che:

$$\theta'''(0).Z(0) = \theta''(0).Z(0) - (\theta''(0).Z(0)).Z_0(0) = 0$$
$$\theta'''(T).Z(T) = \theta''(T).Z(T) - (\theta''(0).Z(0)).Z_0(T) = -\theta''(0).Z(0) > 0$$

quindi θ''' é un pasto gratis semplice, che, dalle ipotesi fatte, non poteva esistere nel mercato.

Se $\theta(0).Z(0) > \theta'(0).Z(0)$, si definisce $\theta'' = \theta' - \theta$ e si procede analogamente.

□

Chiamiamo M il sottoinsieme di $\mathbf{X}$ dei consumi al tempo T acquistabili al tempo 0. Se il modello di mercato é privo di pasti gratis semplici, per il lemma precedente possiamo definire un funzionale $\pi : M \to \mathbf{R}$ come $\pi(X) = \theta(0).Z(0)$, dove θ é una qualsiasi strategia semplice autofinanziante che replica X.

Lemma 7.14 *: se il modello di mercato é privo di pasti gratis semplici, allora (M, π) é un sistema di prezzi.*

Dimostrazione: mostriamo innanzitutto che M non é vuoto: infatti $0 \in M$, poiché é generato dalla strategia $\theta(t) = 0$. Inoltre M é uno spazio vettoriale, e π é lineare su M. Infatti, se $X, X' \in M$ sono generati rispettivamente da θ e θ', allora $\forall a, b \in \mathbf{R}$, la strategia $a\theta + b\theta'$ é autofinanziante, e genera $aX + bX'$, quindi $aX + bX' \in M$ e:

$$\begin{aligned} \pi(aX + bX') &= (a\theta(0) + b\theta'(0)).Z(0) = a\theta(0).Z(0)) + b\theta'(0).Z(0) = \\ &= a\pi(X) + b\pi(X') \end{aligned}$$

quindi π é lineare.

□

Diciamo che un modello di mercato é **ammissibile** se é privo di pasti gratis semplici ed ha un sistema di prezzi (M, π) ammissibile.

Il prossimo teorema dá una caratterizzazione dei modelli di mercato ammissibili, ed il risultato dipendente da questo é quello che caratterizza la Finanza moderna. Per il seguito, si intenderá come "misura di martingala equivalente" una misura equivalente a $\mathbf{P}$ che rende una martingala il processo $(Z(t))_t$.

Teorema 7.15 *: se un modello di mercato é privo di pasti gratis semplici, allora c'é una corrispondenza biunivoca tra l'insieme:*

$$\{\mathbf{P}^* \in M_1^+(\Omega) | \mathbf{P}^* \text{ é una mis. di mart. eq. a } \mathbf{P} \text{ con dens.} \rho \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})\}$$

e l'insieme:

$$\{\psi \in \Psi | \psi|_M = \pi\}$$

data da:

$$\mathbf{P}^*(B) = \psi(\mathbf{1}_B)\ \forall B \in \mathcal{F}$$
$$\psi(X) = E_{\mathbf{P}^*}[X]\ \forall X \in \mathbf{X}$$

Dimostrazione: supponiamo che $\mathbf{P}^*$ sia una misura equivalente di martingala con densitá $\rho \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Definiamo allora $\psi : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ tale che $\psi(X) = E_{\mathbf{P}^*}[X]$. Questa é una buona definizione; infatti $\forall X \in \mathbf{X}$ si ha:

$$E_{\mathbf{P}^*}[X] = E_{\mathbf{P}}[\rho X] \leq \sqrt{E_{\mathbf{P}}[\rho^2]}.\sqrt{E_{\mathbf{P}}[X^2]} < +\infty$$

Allora ψ é lineare, continua (infatti $\psi(X) \leq \|\rho\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})}.\|X\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})}\ \forall X \in \mathbf{X}$); inoltre ψ é positiva; infatti, se $X \in \mathbf{X}^+$, allora $\mathbf{P}\{X > 0\} = \delta > 0$, quindi $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\mathbf{P}\{X > \varepsilon\} \geq \frac{\delta}{2}$, e $\psi(X) = E_{\mathbf{P}^*}[X] \geq \delta\varepsilon > 0$. Vediamo infine che $\psi|_M = \pi$. Se $X \in M$, allora esiste una strategia semplice autofinanziata θ che simula X e tale che $\theta(0).Z(0) = \pi(X)$. Poiché $(Z(t))_t$ é una $\mathbf{P}^*$-martingala,si ha che $\forall i = 0, ..., N-1$:

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{P}^*}[\theta(t_i).Z(t_i)|\mathcal{F}_{t_{i-1}}] &= E_{\mathbf{P}^*}[\theta(t_{i-1}).Z(t_i)|\mathcal{F}_{t_{i-1}}] = \\ &= \theta(t_{i-1})E_{\mathbf{P}^*}[Z(t_i)|\mathcal{F}_{t_{i-1}}] = \theta(t_{i-1}).Z(t_{i-1}) \end{aligned}$$

Allora:

$$E_{\mathbf{P}^*}[\theta(t_i).Z(t_i)] = E_{\mathbf{P}^*}[E_{\mathbf{P}^*}[\theta(t_i).Z(t_i)|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]] = E_{\mathbf{P}^*}[\theta(t_{i-1}).Z(t_{i-1})]$$

quindi:

$$\psi(X) = E_{\mathbf{P}^*}[\theta(T).Z(T)] = E_{\mathbf{P}^*}[\theta(0).Z(0)] = \pi(X)$$

e abbiamo una parte della tesi.

Viceversa, supponiamo che $\psi \in \Psi$ sia tale che $\psi|_M = \pi$. Definiamo allora $\mathbf{P}^*(B) = \psi(\mathbf{1}_B)\ \forall B \in \mathcal{F}$.

Verifichiamo che questa funzione d'insieme é una misura di probabilitá: $\mathbf{P}^*(\emptyset) = \psi(0) = 0$, $\mathbf{P}^*(\Omega) = \psi(1) = 1$ (poiché una strategia replicante $\mathbf{1}_\Omega$ é $\theta(t) = (1, 0, ...0)\ \forall t$, che ha quindi prezzo 1); inoltre, poiché ψ é positivo, e le indicatrici sono non negative, allora $\mathbf{P}^*(B) \geq 0 \; \forall B \in \mathcal{F}$.

Rimane da verificare che $\mathbf{P}^*$ é $\sigma-$additiva; se $(B_n)_n$ é una successione di eventi disgiunti, allora, poiché ψ é lineare e continua, si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^*\left(\cup_1^\infty {}_n B_n\right) &= \psi(\mathbf{1}_{\cup_1^\infty {}_n B_n}) = \psi(\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\cup_1^n {}_i B_i}) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \psi(\mathbf{1}_{\cup_1^n {}_i B_i}) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n {}_i \psi(\mathbf{1}_{B_i}) = \sum_1^\infty {}_n \mathbf{P}^*(B_n)\end{aligned}$$

quindi $\mathbf{P}^*$ é una misura di probabilitá.

Verifichiamo ora che $\mathbf{P}^*$ é equivalente a $\mathbf{P}$ e che la sua densitá é a quadrato integrabile. Se $\mathbf{P}(B) = 0$, allora $\mathbf{1}_B = 0$ q. c., e quindi $\mathbf{P}^*(B) = \psi(\mathbf{1}_B) = 0$. Viceversa, se $\mathbf{P}(B) > 0$, allora $\mathbf{1}_B \in \mathbf{X}^+$ e, siccome ψ é positivo, $\mathbf{P}^*(B) = \psi(\mathbf{1}_B) > 0$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz, poiché ψ é lineare e continuo, allora $\exists \rho \in \mathbf{X}$ tale che $\psi(X) =< \rho, X >_{\mathbf{X}} = E_{\mathbf{P}}[\rho.X] \; \forall X \in \mathbf{X}$, quindi $\psi(\mathbf{1}_B) = E_{\mathbf{P}^*}[\mathbf{1}_B] = E_{\mathbf{P}}[\rho.\mathbf{1}_B]$, quindi la densitá di $\mathbf{P}^*$ rispetto a $\mathbf{P}$ é proprio $\rho \in \mathbf{X} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Verifichiamo infine che $(Z(t))_t$ é una $\mathbf{P}^*-$martingala; $(Z_0(t))_t = 1$ é ovviamente una martingala; verifichiamo ora che $(Z_k(t))_t$ é una $\mathbf{P}^*-$martingala $\forall k$. A tal fine consideriamo un evento $B \in \mathcal{F}_s$, con $0 \leq s < t \leq T$, e costruiamo la strategia semplice autofinanziante:

$$\theta(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq u < s \\ (-Z_k(s)\mathbf{1}_B, 0, ..., \mathbf{1}_B, ..., 0) & \text{se } s \leq u < t (\mathbf{1}_B \;\; \text{nel } k - \text{esimo posto} \\ ((Z_k(t) - Z_k(s))\mathbf{1}_B, 0, ..., 0) & \text{se } t \leq u \leq T \end{cases}$$

Allora $\theta(0).Z(0) = 0$ e $\theta(T).Z(T) = (Z_k(t) - Z_k(s))\mathbf{1}_B$, quindi il consumo $(Z_k(t) - Z_k(s))\mathbf{1}_B$ é acquistabile al tempo 0 a costo 0. Notiamo inoltre che, per come abbiamo costruito la probabilitá $\mathbf{P}^*$, $\psi(X) = E_{\mathbf{P}^*}X] \; \forall X \in \mathbf{X}$. Si dovrá quindi avere:

$$E_{\mathbf{P}^*}[(Z_k(t) - Z_k(s))\mathbf{1}_B] = \psi((Z_k(t) - Z_k(s))\mathbf{1}_B) = \pi((Z_k(t) - Z_k(s))\mathbf{1}_B) = 0$$

quindi:

$$\int_B Z_k(t) \; d\mathbf{P}^* = \int_B Z_k(s) \; d\mathbf{P}^*$$

Siccome B era un qualsiasi elemento della tribú $\mathcal{F}_s$, questo significa che $E_{\mathbf{P}^*}[(Z_k(t)|\mathcal{F}_s] = Z_k(s) \; \forall s < t$, e quindi $(Z_k(t))_t$ é una $\mathbf{P}^*-$martingala.

Rimane da verificare che la corrispondenza é biunivoca. Se costruisco una misura di probabilitá $\mathbf{P}^*$ a partire da un funzionale ψ nel modo usato nel teorema, e poi costruisco un funzionale ψ' dalla probabilitá, allora ho che:

$$\psi'(\mathbf{1}_B) = E_{\mathbf{P}^*}[\mathbf{1}_B] = \mathbf{P}^*(B) = \psi(\mathbf{1}_B) \; \forall B \in \mathcal{F}$$

siccome le indicatrici sono dense in $\mathbf{X}$, allora $\psi' = \psi$. Viceversa, se dalla misura $\mathbf{P}^*$ costruisco un funzionale ψ e da questo costruisco una misura $\mathbf{P}^{**}$, allora abbiamo:

$$\mathbf{P}^{**}(B) = \psi(\mathbf{1}_B) = E_{\mathbf{P}^*}[\mathbf{1}_B] = \mathbf{P}^*(B)\ \forall B \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbf{P}^{**} = \mathbf{P}^*$$

e abbiamo quindi la tesi.

□

Corollario 7.16 : *un modello di mercato é ammissibile se e solo se ammette almeno una misura equivalente di martingala.*

Dimostrazione: se il mercato é ammissibile, significa che non ammette pasti gratis semplici, e che esiste un funzionale lineare e continuo ψ tale che $\psi|_M = \pi$. Per il teorema precedente, esiste una misura equivalente di martingala. Viceversa, se esiste una misura equivalente di martingala $\mathbf{P}^*$, allora non ci possono essere pasti gratis semplici. Infatti, per ogni strategia semplice autofinanziante θ tale che $X = \theta(T).Z(T) \in \mathbf{X}^+$, abbiamo che $\mathbf{P}\{X > 0\} > 0$, quindi $\mathbf{P}^*\{X > 0\} > 0$, e quindi:

$$\theta(0).Z(0) = \pi(X) = \psi(X) = E_{\mathbf{P}^*}[X] > 0$$

ció significa che non ci possono essere pasti gratis semplici; il teorema ci dice allora che esiste un funzionale lineare e continuo la cui restrizione a M é π, e quindi il mercato é ammissibile.

□

Se chiamiamo $\mathcal{P}$ l'insieme delle misure equivalenti di martingala per il mercato, il corollario precedente significa che il mercato é ammissibile se e solo se $\mathcal{P} \neq \emptyset$.

Se ora chiamiamo $\hat{M}$ il sottospazio di $\mathbf{X}$ dei consumi al tempo T prezzati per arbitraggio, e $\hat{\pi}$ l'estensione di π ad $\hat{M}$, che abbiamo visto essere unica nel caso di un mercato ammissibile, allora abbiamo il seguente:

Corollario 7.17 : *se il modello di mercato é ammissibile, allora $X \in \hat{M}$ se e solo se $E_{\mathbf{P}^*}[X]$ é lo stesso $\forall \mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$; in questo caso, $E_{\mathbf{P}^*}[X] = \hat{\pi}(X)\ \forall \mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$.*

Dimostrazione: se il modello di mercato é ammissibile, allora il sistema di prezzi $(\hat{M}, \hat{\pi})$ é ammissibile; allora $\forall \mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$ posso trovare uno $\psi \in \Psi$ tale che $\psi|_{\hat{M}} = \hat{\pi}$, e $E_{\mathbf{P}^*}[X] = \psi(X) = \hat{\pi}(X)\ \forall X \in \hat{M}$. Viceversa, se $\forall \mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$ ho che $E_{\mathbf{P}^*}[X]$ é lo stesso, allora $\forall \psi \in \Psi$ che estende $\hat{\pi}$, $E_{\mathbf{P}^*}[X] = \psi(X)$ non dipende dal particolare ψ scelto, e quindi X é prezzato per arbitraggio.

□

Corollario 7.18 : *se il modello di mercato é ammissibile, allora $\hat{M} = X$ se e solo se $\mathcal{P}$ ha solo un elemento.*

Dimostrazione: supponiamo che il modello di mercato sia ammissibile; se $\mathcal{P}$ ha solo un elemento, allora anche l'insieme dei funzionali $\psi \in \Psi$ estendenti π ha solo un elemento, e quindi tutti i consumi $X \in \mathbf{X}$ sono prezzati per arbitraggio, quindi $\hat{M} = X$. Viceversa, se $\hat{M} = X$, allora ogni funzionale $\psi \in \Psi$ che estende π assume lo stesso valore su ogni $X \in \mathbf{X}$, e quindi esiste solo uno di questi funzionali, e quindi $\mathcal{P}$ ha solo un elemento.

□

Quando questo si verifica, tutti i possibili consumi presenti sul mercato possono essere prezzati mediante arbitraggio; si dice allora che il mercato é **completo**.

7.10 Modello di mercato con prezzi dei titoli continui

Supponiamo di avere un mercato composto da $d+1$ titoli, il cui prezzo é descritto dai processi stocastici $S_0(t), ..., S_d(t)$. Supponiamo che il titolo 0 sia un'obbligazione, e i titoli da 1 a d siano azioni. Abbandoniamo l'ipotesi che $S_0(t) = 1$ identicamente, e supponiamo che i prezzi evolvano con continuitá; inoltre, supponiamo che il prezzo del titolo 0 dipenda solo da un processo $(r(t))_t \in \Lambda^1_W$, che chiamiamo **spot rate**, e che per ora supponiamo noto, in modo che l'equazione che descrive S_0 sia del tipo:

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)\ dt$$

dove $S_0(0) = 1$. Vedremo poi che ci sono diversi modelli per $r(t)$. I prezzi degli altri titoli soddisfano invece equazioni del tipo:

$$dS_i(t) = b_i(t)S_i(t)\ dt + S_i(t)\sum_j \sigma_{ij}(t)\ dW_j(t)$$

dove $(b_i(t))_t \in \Lambda^1_W$, $(\sigma_{ij}(t))_t \in \Lambda^2_W$ e $(W(t))_t$ é un moto browniano standard k-dimensionale. Notiamo subito che queste sono equazioni lineari, per cui esiste un'unica soluzione, data da:

$$S_0(t) = e^{\int_0^t r(u)\ du}$$

$$S_i(t) = S_i e^{\int_0^t (b_i(u) - \frac{1}{2}\sum_j \sigma^2_{ij}(u))\ du + \sum_j \int_0^t \sigma_{ij}(u)\ dW_j(u)}$$

Chiamiamo $(\theta(t))_t$ il processo rappresentante la strategia di portafoglio; allora la ricchezza al tempo t é data da:

$$X(t) = \sum_i S_i(t)\theta_i(t) = S(t).\theta(t)$$

Vogliamo ricondurci al caso trattato prima, in cui i processi dei prezzi dei titoli erano delle martingale.

Costruiamo il nuovo processo di prezzi:

$$Z(t) = \frac{S(t)}{S_0(t)} = \left(\frac{S_0(t)}{S_0(t)}, \frac{S_1(t)}{S_0(t)}, ..., \frac{S_d(t)}{S_0(t)}\right)$$

allora il titolo non rischioso é identicamente uguale a 1 come prima, e i nuovi titoli soddisfano le equazioni:

$$dZ_i(t) = (b_i(t) - r(t))Z_i(t)\ dt + Z_i(t)\sum_j \sigma_{ij}(t)\ dW_j(t),\ \ i = 1, ..., d$$

Vogliamo ora trovare una misura $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$ tale che questi processi siano delle martingale. Ricordiamo che nella parte relativa al teorema di Girsanov, sotto opportune ipotesi si poteva costruire un processo $(\tilde{W}(t))_t$ ed una misura di martingala equivalente per il processo $(Z(t))_t$.

Lemma 7.19 : *se $d = k$ (cioé il numero dei titoli rischiosi é uguale al numero dei moti browniani), $\sigma(t)$ invertibile $\mathbf{P}$-q.c. $\forall t \in [0, T]$, $\int_0^T \|\sigma^{-1}(b(t) - r(t)(1, ..., 1))\|\ dt \leq K$, (dove $\|.\|$ é la norma euclidea su $\mathbf{R}^n$), allora il processo:*

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \sigma^{-1}(t)(b(t) - r(t)(1, ..., 1))\ dt$$

é un moto browniano rispetto alla probabilitá $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$ e definita da:

$$\mathbf{P}^* = e^{-\int_0^T \sigma^{-1}(t)(b(t)-r(t)(1,...,1))\ dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^T \|\sigma^{-1}(t)(b(t)-r(t)(1,...,1))\|^2\ dt}.\mathbf{P}$$

Se facciamo l'ulteriore ipotesi che $(\sigma_t)_t \in M^2_{\tilde{W}}$, allora i prezzi dei titoli soddisfano le equazioni:

$$dZ_i(t) = Z_i(t)\sum_j \sigma_{ij}(t)\ d\tilde{W}_j(t), i = 1, ..., d$$

che hanno come soluzioni esplicite:

$$Z_i(t) = S_i e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \sum_j \sigma_{ij}^2(u))\ du + \sum_j \int_0^t \sigma_{ij}(u)\ dW_j(u)}$$

Dimostrazione: la dimostrazione segue banalmente dal lemma (4.9) e dalla formula di risoluzione delle equazioni lineari (5.5).

□

7.11 Valutazione dei titoli derivati

Vogliamo ora caratterizzare i consumi $X \in \mathbf{X}$ acquistabili al tempo 0. In particolare, vedremo delle ipotesi sufficienti sotto cui il mercato é completo, e quindi ogni consumo $X \in \mathbf{X}$ é simulabile, e quindi acquistabile al tempo 0. Per fare questo ricordiamo che avevamo definito una strategia semplice autofinanziante $(\theta(t))_t$ come un processo adattato a $(\mathcal{F}_t)_t$, tale che $\theta(t).Z(t) \in L^2$ $\forall t \in [0,T]$, del tipo:

$$\theta(t) = \sum_{0}^{N-1} i\theta_i.\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}$$

con $\theta_i\mathcal{F}_{t_i}$-misurabile e $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ e tale che: $\theta(t_{i-1}).Z(t_i) = \theta(t_i).Z(t_i)$ $\forall t \in [0,T]$. Questo tipo di strategia é tale che, se definisco il **valore del portafoglio** come il processo $(V(t))_t$ dato da $V(t) = \theta(t).S(t)$, e $(\theta_0(t) \in \Lambda^1_W$, $(\theta_i(t) \in \Lambda^2_W$ $\forall i = 1,...,d$, allora $dV(t) = \theta(t)\ dS(t)$. Questo in virtú del seguente:

Lemma 7.20 *: se $(\theta(t))$ é una strategia semplice autofinanziante tale che $(\theta_0(t))_t \in \Lambda^1_W$, $(\theta_i(t))_t \in \Lambda^2_W$ $\forall i = 1,...,d$, allora $dV(t) = \theta(t)\ dS(t)$.*

Dimostrazione: supponiamo che:

$$\theta(t) = \sum_k \theta^{(k)}\mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1})}(t)$$

se calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \theta(u)\ dS(u) &= \int_0^t \theta_0(u)r(u)S_0(u)\ du + \int_0^t (\sum_i \theta_i(u)b_i(u)S_i(u))\ du + \\
&\quad + \sum_{ij}\int_0^t \theta_i(u)S_i(u)\sigma_{ij}\ dW_j(u) = \\
&= \sum_k \theta_0^{(k)}\int_{t_k}^{t_{k+1}} r(u)S_0(u)\ du + \\
&\quad + \sum_{ki}\theta_i^{(k)}.\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \theta_i(u)b_i(u)S_i(u))\ du + \sum_j S_i(u)\sigma_{ij}\ dW_j(u)\right) = \\
&= \sum_k \theta_0^{(k)}(S_0(t_{k+1}) - S_0(t_k)) + \sum_{ki}\theta_i^{(k)}(S_i(t_{k+1}) - S_i(t_k)) = \\
&= \sum_k(\sum_{i=0}^{n}\theta_i^{(k+1)}S_i(t_{k+1}) - \theta_i^{(k)}S_i(t_k)) = V(t) - V(0)
\end{aligned}$$

abbiamo la tesi.

□

Possiamo allora dare una definizione piú generale di strategia autofinanziante: una **strategia autofinanziante** é un processo $(\theta(t))_t$ $(d+1)$-dimensionale tale che:

1) $(\theta_0(t))_t \in \Lambda^1_W$, $(\theta_i(t))_t \in \Lambda^2_W$
2) $V(t) = V(0) + \int_0^t \theta(t)\ dS(t)$

Definiamo ora il processo $\tilde{S}(t) = S_0^{-1}(t)$; notiamo allora che $d\tilde{S}(t) = -r(t)\tilde{S}(t)\ dt$; siccome $(r(t))_t \in \Lambda^1_W$, allora $(\tilde{S}(t))_t$ é un processo continuo, e in particolare appartiene a Λ^2_W. Notiamo inoltre che $Z(t) = S(t).\tilde{S}(t)$. Se chiamiamo **valore del portafoglio attualizzato** il processo $\tilde{V}(t) = \tilde{S}(t).V(t)$, allora vale la seguente:

Proposizione 7.21 *: se $(\theta(t))_t$ é un processo tale che $(\theta_0(t))_t \in \Lambda^1_W$, $(\theta_i(t))_t \in \Lambda^2_W$, allora $(\theta(t))_t$ é una strategia autofinanziante se e solo se:*

$$d\tilde{V}(t) = \sum_{i=1}^{d} \theta_i(t).dZ_i(t)$$

Dimostrazione: se supponiamo che $(\theta(t))_t$ sia una strategia autofinanziante, allora per la regola di moltiplicazione dei differenziali stocastici abbiamo:

$$\begin{aligned} d\tilde{V}(t) &= \tilde{S}(t)\ dV(t) + V(t)\ d\tilde{S}(t) = \theta(t)\tilde{S}(t)\ dS(t) - \theta(t).S(t)r(t)\tilde{S}(t)\ dt = \\ &= \theta(t)(\tilde{S}(t)\ dS(t) - S(t)r(t)\tilde{S}(t)\ dt) = \theta(t)\ dZ(t) \end{aligned}$$

L'implicazione inversa si ricava in modo analogo.

□

Diciamo che una strategia é **ammissibile** se é autofinanziante ed é tale che $\tilde{V}(t) = \tilde{S}(t).V(t) \in \mathbf{X}^+\ \forall t$.

Diamo ora una definizione piú generale di consumo acquistabile in 0. Un consumo $X \in \mathbf{X}$ si dice **acquistabile** al tempo 0 (o **simulabile**) se esiste una strategia ammissibile tale che $X = \theta(T).Z(T)$. Poiché il consumo X viene simulato mediante i titoli $Z(t)$ presenti sul mercato, spesso si usa per X il nome di **titolo derivato**.

Teorema 7.22 *: sotto le ipotesi in cui il processo $Z(t)$ é una $\mathbf{P}$-martingala, e l'ulteriore ipotesi che $\|\sigma^{-1}(t)\| \leq K\ \forall t$ (dove con $\|A\|$ si intende il massimo degli autovalori di A), allora ogni consumo $X \in \mathbf{X}^+$ é simulabile, ed il valore all'istante t del portafoglio simulante il consumo é:*

$$V(t) = E_{\mathbf{P}^*}[\tilde{S}_0(t).X|\mathcal{F}'_t]$$

dove $(\mathcal{F}'_t)_t$ é la filtrazione naturale del moto browniano $(\tilde{W}(t))_t$.

Dimostrazione: cerchiamo una strategia ammissibile $(\theta_0(t), \theta(t))_t$, dove da ora in poi intenderemo sempre $\theta(t) = (\theta_1(t), ..., \theta_d(t))$. Supponiamo che $(\theta_0(t), \theta(t))_t$ sia ammissibile; avremo allora:

$$V(t) = \theta_0(t)S_0(t) + \theta(t).S(t)$$

attualizziamo e troviamo che:

$$\tilde{V}(t) = \theta_0(t) + \theta(t).Z(t)$$

allora, per la proposizione precedente:

$$\tilde{V}(t) = \tilde{V}(0) + \int_0^t \sum_i \theta_i(u)\ dZ_i(u) = \tilde{V}(0) + \int_0^t \sum_{ij} \theta_i(u) Z_i(u) \sigma_{ij}\ d\tilde{W}_j(u)$$

allora $(V_t)_t$ dovrá essere una $\mathbf{P}^*$-martingala adattata alla filtrazione naturale di $(\tilde{W}_(t))_t$.

Costruiamo ora la strategia: notiamo che, se chiamiamo $(\mathcal{F}'_t)_t$ la filtrazione naturale del moto browniano $(\tilde{W}(t))_t$, allora la quantitá

$$E_{\mathbf{P}^*}[\tilde{S}_0(t).X|\mathcal{F}'_t]$$

é una $\mathbf{P}^*$-martingala adattata a $(\mathcal{F}'_t)_t$; allora, per il teorema di rappresentazione delle martingale, esiste un processo $(H_t)_t \in M^2_{\tilde{W}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}^*; \mathbf{R}^d)$ tale che

$$E_{\mathbf{P}^*}[\tilde{S}_0(t).X|\mathcal{F}'_t] = E_{\mathbf{P}^*}[\tilde{S}_0(0).X] + \int_0^t H(u)\ d\tilde{W}(u)\ \forall t$$

Siccome vogliamo che $\tilde{V}(T) = \tilde{S}_0(t).X$ e che $(\tilde{V}(t))_t$ sia una martingala, avremo:

$$\tilde{V}(t) = E_{\mathbf{P}^*}[\tilde{S}_0(t).X|\mathcal{F}'_t]$$

e quindi:

$$\tilde{V}(t) = \tilde{V}(0) + \int_0^t H(u)\ dW(u)\ \forall t$$

allora dovrá essere soddisfatta la seguente uguaglianza:

$$H_j(t) = \sum_i \theta_i(t) Z_i(t) \sigma_{ij}\ \forall t$$

che, scritta in forma vettoriale diventa:

$$H(t) = \sigma(t)(\theta(t).Z(t))$$

dove qui peró $\theta.Z = (\theta_1.Z_1, ..., \theta_d.Z_d)$. allora, per trovare la strategia poniamo:

$$\sigma^{-1}(t)H(t) = \theta(t).Z(t)$$

e infine:

$$\theta_i(t) = \frac{\sigma^{-1}(t)H(t)|_i}{Z_i(t)}$$

allora $(Z_i(t))_t$ é un processo continuo e sempre positivo (se si parte da dati iniziali positivi), quindi é limitato; se poi $\|\sigma^{-1}(t)\| \leq K$ $\forall t$ allora θ_i appartiene a $\Lambda^2_{\tilde{W}}$. Infine il processo $\theta_0(t) = E_{\mathbf{P}^*}[\tilde{S}_0(t).X|\mathcal{F}'_t] - \theta(t).Z(t)$ é tale che il processo $(\theta_0(t), \theta(t))_t$ é una strategia ammissibile.

□

Corollario 7.23 : *sotto le ipotesi del teorema, il mercato é completo.*

□

7.12 Modello di Black-Scholes

Il seguente modello é storicamente il primo modello apparso nella letteratura a dare una formula esplicita per il calcolo di particolari titoli derivati, chiamati opzioni, la cui trattazione avverrá in seguito. La sua peculiaritá é che i coefficienti delle equazioni descriventi i prezzi dei titoli sono costanti. Infatti i prezzi dei titoli sono descritti dalle equazioni:

$$dS_0(t) = S_0(t) r \ dt$$

$$dS_i(t) = S_i(t) b_i \ dt + S_i(t) \sum_j \sigma_{ij} \ dW_j(t), \ \ i = 1, ..., d$$

dove $r > 0$, $b \in \mathbf{R}^n$ e $\sigma_i \in M(d, k, \mathbf{R})$ é di rango massimo. Se chiamo $S = (S_0, ..., S_d)$ i prezzi dei titoli al tempo 0, allora queste equazioni hanno soluzioni esplicite:

$$S_0(t) = S_0 e^{rt}$$

$$S_i(t) = S_i e^{\sigma_i W_i(t) + (b_i - \frac{\sigma_i^2}{2})t} i = 1, ..., d$$

Notiamo allora che il logaritmo della variabile aleatoria $S_i(t)$ é una variabile aleatoria gaussiana; si dice allora che $S_i(t)$ ha **legge log-normale**. Il pregio di questo modello é che si possono ricavare formule esplicite per molte quantitá utili in pratica (come vedremo meglio quando studieremo le opzioni).

Ripetendo il procedimento usato per il caso generale, otteniamo il nuovo processo:

$$Z(t) = \frac{S(t)}{S_0(t)} = \left(1, \frac{S_1(t)}{S_0(t)}, ..., \frac{S_d(t)}{S_0(t)}\right)$$

che soddisfa le equazioni:

$$dZ_i(t) = (b_i - r)Z_i(t)\ dt + Z_i(t) \sum_j \sigma_{ij}\ dW_j(t), i = 1, ..., d$$

Se $k = d$ (cioé il numero dei titoli rischiosi é uguale al numero dei moti browniani), allora, poiché σ é di rango massimo, é invertibile; allora tutte le ipotesi del lemma (?) sono soddisfatte, e la misura $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$ tale che $(Z(t))_t$ é una martingala é:

$$\mathbf{P}^* = e^{-\sigma^{-1}(b-r(1,...,1))\ dW(T) - \frac{1}{2}||\sigma^{-1}(b-r(1,...,1))^2||^2 T}.\mathbf{P}$$

ed il moto browniano $(\tilde{W}(t))_t$ diventa:

$$\tilde{W}_i(t) = W(t) + \frac{b_i - r}{\sigma_i} t$$

I prezzi dei titoli soddisfano allora le equazioni:

$$dZ_i(t) = Z_i(t) \sum \sigma_{ij}\ d\tilde{W}_j(t), i = 1, ..., d$$

le cui soluzioni esplicite é:

$$Z_i(t) = S_i e^{\sum_j \sigma_{ij} \tilde{W}_j(t) - \frac{1}{2}\sum_j \sigma_{ij}^2 t},\ \ i = 1, ..., d$$

Se ora controlliamo quali consumi sono simulabili, scopriamo che, se σ é invertibile, allora le ipotesi della proposizione (7.22) sono verificate, quindi tutti i consumi $X \in \mathbf{X}$ sono simulabili, ed il valore del portafogli simulante é uguale a:

$$V(t) = E_{\mathbf{P}^*}[e^{-r(T-t)} X | \mathcal{F}_t]$$

7.13 Valutazione delle opzioni europee

Rivolgiamo ora la nostra attenzione a particolari esempi di titoli derivati, la cui presenza é usuale nei mercati finanziari. Si chiamano **opzioni** dei contratti che danno al contraente la facoltá (non l'obbligo) di comprare (in questo caso si parla di **call**) o vendere (in questo caso si parla di **put**) una unitá di un determinato titolo ad un determinato prezzo K, chiamato **prezzo di esercizio** (in inglese **strike price**) ad un tempo appartenente ad un insieme $\mathbf{T}$.

Ci sono due tipi principali di opzioni sui mercati: le opzioni **europee**, in cui $\mathbf{T} = \{T\}$, e le opzioni **americane**, in cui $\mathbf{T} = [0, T]$. In entrambi i casi il tempo T viene chiamato **tempo di esercizio** (in inglese **strike time**).

Vediamo in dettaglio una opzione europea, ed in particolare una call. Questo titolo permette ad un agente di acquistare al tempo T una unitá di un determinato titolo, che supponiamo avere prezzo descritto dal processo $(S(t))_t$, al prezzo di esercizio K. Ora, siccome l'agente mira a massimizzare il proprio guadagno, non eserciterá l'opzione se il prezzo $S(T)$ sará piú basso di K (poiché potrebbe comprare il titolo al prezzo piú basso $S(T)$); viceversa, se al tempo T il prezzo $S(T)$ sará piú alto di K, allora l'agente avrá la facoltá di esercitare l'opzione pagando K e di rivendere il titolo ad un prezzo piú alto $S(T)$. Possiamo quindi affermare che una opzione call europea sul titolo il cui prezzo é rappresentato dal processo $(S(t))_t$ é rappresentata dalla funzione:

$$(S(T) - K)^+$$

Un analogo ragionamento ci porta a dire che una opzione put europea sul titolo avente processo del prezzo $(S(t))_t$ é rappresentata dalla funzione:

$$(K - S(T))^+$$

Ci poniamo ora nell'ipotesi che il prezzo del titolo soddisfi l'equazione:

$$dS(t) = b(t)S(t)\ dt + \sigma(t)S(t)\ dW(t)$$

con $(b(t))_t \in \Lambda^1_W, (\sigma(t))_t \in \Lambda^2_W$ processi unidimensionali, $(W(t))_t$ moto browniano standard unidimensionale, e dato iniziale $S(0) = S_0 > 0$.

Supponiamo inoltre di avere dimostrato che una opzione call puó essere prezzata per arbitraggio. Se il mercato é completo (ad esempio nel caso trattato prima), allora in particolare le opzioni call e put europee sono dei consumi ammissibili, poiché le funzioni $(S(T) - K)^+$ e $(K - S(T))^+$ appartengono ad $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Vediamo ora quali sono i due principali metodi usati per dare un prezzo a queste opzioni.

Ci sono essenzialmente due modi per dare il prezzo ad una call. Il primo metodo usa il fatto che esiste una misura equivalente di martingala per un mercato privo di arbitraggi. Allora, siccome una call europea é un consumo ammissibile (infatti appartiene ad $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}^*)$), allora il suo prezzo al tempo 0 é dato da:

$$\begin{aligned}
C(0) &= E_{\mathbf{P}^*}\left[\frac{(S(T) - K)^+}{S_0(T)}\right] = \\
&= E_{\mathbf{P}^*}\left[e^{-\int_0^T r(u)\ du}\left(S_0 e^{\int_0^T \sigma(t)\ dW(t) + \int_0^T (b(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2})\ dt} - K\right)^+\right] = \\
&= E_{\mathbf{P}^*}\left[e^{-\int_0^T r(u)\ du}\left(S_0 e^{\int_0^T \sigma(t)\ d\tilde{W}(t) + \int_0^T (r(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2})\ dt} - K\right)^+\right]
\end{aligned}$$

quantitá che puó essere calcolata, ricordando che $(\tilde{W}(t))_t$ é un $\mathbf{P}^*-$moto browniano.

Per calcolare il prezzo di una put, notiamo che le espressioni che descrivono le due opzioni sono molto simili; questo ci suggerisce di scrivere:

$$S(T) - K = (S(T) - K)^+ - (S(T) - K)^- = (S(T) - K)^+ - (K - S(T))^+$$

Allora:

$$e^{-\int_0^T r(t)\ dt}(S(T) - K) = e^{-\int_0^T r(t)\ dt}(S(T) - K)^+ - e^{-\int_0^T r(t)\ dt}(K - S(T))^+$$

Calcolando le speranze di queste quantitá, e ricordando che il processo $(S(t)e^{-\int_0^t r(u)\ du})_t$ é una martingala ottengo:

$$E_{\mathbf{P}^*}[e^{-\int_0^T r(t)\ dt}(S(T) - K)] = C(0) - P(0)$$

$$C(0) - P(0) = S(0) - E_{\mathbf{P}^*}[e^{-\int_0^T r(t)\ dt}]K$$

Questa relazione, che lega il prezzo di una call e il prezzo di una put al prezzo del titolo e alla quota di esercizio, viene chiamata **relazione di paritá call - put**.

Esempio: nel modello di Black-Scholes, si ha $r(t) = r, b(t) = b$ e $\sigma(t) = \sigma$. Allora il prezzo di una opzione é dato da:

$$C(0) = E_{\mathbf{P}^*}[e^{-rT}(S_0 e^{\sigma \tilde{W}(T) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K)^+]$$

$\square$

Notiamo che la variabile aleatoria $\tilde{W}(T)$ ha legge $N(0, \sqrt{T})$. Allora possiamo calcolare la speranza in questo modo:

$$C(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT}(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\ dz$$

Ora, vediamo quando $S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K \geq 0$:

$$S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K \geq 0 \Leftrightarrow z \geq z^* = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \log\frac{K}{S_0} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} - \frac{r\sqrt{T}}{\sigma}$$

Allora la formula diventa:

$$C(0) = \int_{z^*}^{+\infty} e^{-rT}(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\ dz$$

Introducendo la funzione:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2}\ dz$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
C(0) &= \int_{z^*}^{+\infty} S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sigma\sqrt{T}z - \frac{\sigma^2}{2}T - \frac{1}{2}z^2}\ dz - \int_{z^*}^{+\infty} K e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\ dz = \\
&= S_0 \int_{z^*}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{T})^2}\ dz - K e^{-rT}(1-\phi(z^*)) = \\
&= S_0(1-\phi(w^*)) - K e^{-rT}(1-\phi(z^*))
\end{aligned}$$

dove $w^* = z^* - \sigma\sqrt{T}$; ricordando che $\phi(-z) + \phi(z) = 1$, arriviamo alla seguente formula esplicita:

$$C(0) = S_0\phi(-w^*) - K e^{-rT}\phi(-z^*)$$

La relazione di paritá call - put diventa:

$$C(0) - P(0) = S(0) - e^{-rT}K$$

e ci permette di calcolare subito il prezzo di una put europea:

$$P(0) = C(0) - S(0) + e^{-rT}K = e^{-rT}K\phi(z^*) - S_0\phi(w^*)$$

Il secondo metodo usato richiede l'ipotesi aggiuntiva che b, σ e r non siano dei processi qualsiasi, ma siano delle funzioni deterministiche, rispettivamente di classe C^1 e C^2; i prezzi dei titoli soddisfano allora le equazioni:

$$dS(t) = b(t)S(t)\ dt + \sigma(t)S(t)\ dW(t)$$
$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)\ dt$$

Il metodo sfrutta il fatto che i prezzi delle opzioni europee sono delle espressioni della forma:

$$E_{\mathbf{P}^*}[e^{-\int_0^T r(t)\ dt} f(S(T))]$$

Abbiamo visto che, se l'equazione che descrive $(S(t))_t$ é del tipo:

$$dS(t) = b(t, S(t))\ dt + \sigma(t, S(t))\ dW(t)$$

dove b e σ sono funzioni deterministiche di t e di $S(t)$, allora i prezzi delle opzioni al tempo 0 sono uguali a $u(T, 0, S_0)$, dove $u(T, s, x)$ é soluzione dell'equazione backward:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}u(T,s,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(T,s,x) + b(s,x)\frac{\partial}{\partial x}u(T,s,x) = 0 \\ u(T,T,x) = f(x) \end{cases}$$

in particolare, $f(x) = e^{-\int_0^T r(t)\ dt}(x-K)^+$ nel caso di una call, e $f(x) = e^{-\int_0^T r(t)\ dt}(K-x)^+$ nel caso di una put. Il problema di valutazione di una opzione allora si puó ricondurre al problema di trovare una soluzione all'equazione differenziale sopra scritta. Il vantaggio di questo metodo é che si puó calcolare numericamente la soluzione dell'equazione sopra scritta.

Esempio 7.24 *: nel caso del modello di Black-Scholes, l'equazione diventa della forma:*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}u(T,s,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(T,s,x) + bx\frac{\partial}{\partial x}u(T,s,x) = 0 \\ u(T,T,x) = f(x) \end{cases}$$

che viene detta **equazione di Black-Scholes***. La soluzione esplicita di questa equazione é la funzione trovata prima.*

□