Capitolo 8

Modelli di struttura dei tassi di interesse

8.1 Modelli di struttura dei tassi di interesse basati sullo spot rate

Nella precedente trattazione abbiamo supposto il processo $(r(t))_t$ dell'intensitá istantanea del tasso di interesse (o **spot rate**) noto a priori; abbiamo visto anche un esempio di processo possibile nel modello di Black - Scholes, in cui lo spot rate era supposto costantemente uguale a $r > 0$. Usualmente, se si assume che lo spot rate abbia una struttura piú complessa, si suppone che anche esso sia governato da una equazione differenziale stocastica del tipo:

$$dr(t) = a(t)\ dt + \tau(t)\ dW(t)$$

In genere, si usa introdurre una struttura dei tassi di interesse piú complessa di quella del modello di Black - Scholes (in cui si aveva una struttura del tipo $r(t) = r$, chiamata spesso **struttura piatta dei tassi di interesse**), quando si vuole studiare l'evoluzione del prezzo di una obbligazione (ad esempio per poi dare un prezzo alle opzioni sull'obbligazione stessa). In questo caso, si rappresenta l'evoluzione del prezzo $(P(t,T))_t$ all'istante t di una obbligazione che scade all'istante T con una equazione del tipo:

$$dP(t,T) = b(t)P(t,T)\ dt + \sigma(t)P(t,T)\ dW_t$$

dove T viene considerato solo un parametro; viene poi introdotto un altro titolo, chiamato **titolo senza rischio** (che nella realtá si puó identificare con il denaro), che soddisfa l'equazione:

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)\ dt$$

Si fa infine l'ipotesi che esista una misura di martingala $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$ tale che il **prezzo attualizzato** dell'obbligazione, definito da:

$$\tilde{P}(t,T) = \frac{P(t,T)}{S_0(t)}$$

sia una martingala.

Vediamo ora una breve presentazione di due modelli classici di questa equazione.

8.2 Il modello di Vasicek

Il modello di Vasicek parte dall'equazione:

$$dr(t) = a(b - r(t))\ dt + \sigma\ dW(t)$$

con a, b, σ costanti positive. Notiamo che questo é un processo di Ornstein - Uhlenbeck reale, con soluzione esplicita:

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as}\ dW(s)$$

Allora il processo é gaussiano, e la soluzione $r(t)$ ha legge:

$$N\left(r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})\right)$$

Ció dá dei problemi, poiché $\mathbf{P}\{r(t) < 0\} > 0$, e questo é inconsistente con le ipotesi che abbiamo fatto, poiché significa che esistono degli stati del mondo in cui il prezzo di una obbligazione é decrescente. Questo modello é peró usato in pratica, poiché dá delle formule esplicite per il calcolo dei prezzi dei titoli.

8.3 Il modello di Cox - Ingersoll - Ross (CIR)

Il modello di Cox - Ingersoll - Ross, detto anche piú brevemente CIR, parte dall'equazione:

$$dr(t) = (a - br(t))\ dt + \sigma\sqrt{r(t)}\ dW(t)$$

con a e σ costanti positive, e $b \in \mathbf{R}$. Notiamo che a questa equazione non é possibile applicare il teorema di esistenza e unicitá classico. É tuttavia possibile dimostrare che per una equazione siffatta esiste un'unica soluzione (vedi Ikeda - Watanabe[1]) a causa dell'$\frac{1}{2}-$hölderianitá della funzione radice quadrata.

Il vantaggio di questo modello rispetto a quello di Vasicek é che in questo caso si puó dimostrare che $\mathbf{P}\{r(t) \geq 0\} = 1\ \forall t \in [0,T]$.

Una spiegazione qualitativa di questo fenomeno é questa: se $r(t)$ si avvicina allo zero, la traiettoria ha piú o meno lo stesso comportamento di una retta con coefficiente angolare $a > 0$, poiché gli altri termini dipendono da $r(t)$ o dalla sua radice, che possono essere trascurati rispetto ad a; questo significa che la traiettoria, se mai toccherá lo zero, ritorneá subito positiva.

I problemi di questo modello sono essenzialmente due:
1) i calcoli per stimare i prezzi dei titoli sono complicati; questo é un problema minore.
2) se non si scelgono i coefficienti a, b e σ con cura, sono possibili arbitraggi (vedere Cox - Ingersoll - Ross[1])

8.4 Modelli di struttura dei tassi di interesse basati sul forward rate

Negli ultimi anni si é sempre piú diffusa l'opinione che modellizzare l'evoluzione del prezzo di una obbligazione tramite lo spot rate non bastasse, questo a causa di due ragioni: la prima é che lo spot rate é un tasso istantaneo, che quindi non tiene conto della possibile evoluzione futura dei tassi di interesse; la seconda é che é difficile fare una stima dello spot rate, poiché il tasso privo di arbitraggio con scadenza piú breve osservabile sui mercati é quello a scadenza trimestrale; poiché l'ordine di grandezza dell'intervallo $[0, T]$ é tipicamente l'anno, non si possono avere delle rilevazioni troppo precise.

Per questi motivi ha preso sempre piú piede l'idea di modellizzare l'evoluzione del prezzo di una obbligazione tramite l'intensitá istantanea di interesse di proseguimento, detta anche **forward rate**, che é un indice piú preciso e meglio osservabile.

Chiamiamo **forward rate** un processo $(f(t,T))_t$ (notiamo la presenza della variabile $T > t$, che per ora verrá considerata un parametro) tale che il prezzo $P(t,T)$ all'istante t di una obbligazione scadente all'istante T sia della forma:

$$P(t,T) = P(t, t+x) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)\ du\right)$$

L'assunzione naturale che si fa sul forward rate f é che $f(t,t) = r(t)$. cerchiamo di giustificarla con il seguente ragionamento: notiamo che, se usassimo lo spot rate $(r(t))_t$ per calcolare il prezzo $P(t,T)$, otterremmo:

$$P(t,T) = P(t, t+x) = \exp\left(-\int_t^T r(u)\ du\right)$$

Possiamo supporre che, per x molto piccolo, i due modelli del prezzo $P(t,T)$ si comportino allo stesso modo; se supponiamo l'applicazione $u \to f(t,u)$ continua, questo significa che $f(t,u) = r(u)\ \forall u \in [t,T]$; se facciamo tendere u a t, otteniamo la relazione naturale $r(t,0) = r(0)$, che significa che lo spot rate é uguale al forward rate avente parametro di proseguimento $x = 0$.

Anche nei modelli basati sul forward rate, come nella modellizzazione dei tassi di interesse basati sullo spot rate, supponiamo che ci sia una misura di probabilitá $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$ tale che il prezzo attualizzato dell'obbligazione che stiamo esaminando debba essere una $\mathbf{P}^*$-martingala locale; l'attualizzazione verrá effettuata sempre tramite il processo $(S_0(t))_t$, in cui appare lo spot rate. Per ragioni di comoditá di scrittura, supporremo di trovarci giá sotto la misura equivalente di martingala, che chiameremo semplicemente $\mathbf{P}$, e di voler esaminare l'equazione del forward rate.

Supponiamo quindi di essere nello spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, dotato della filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$, dove $\mathbf{P}$ é la probabilitá sotto cui i prezzi dei titoli sono delle martingale, e procediamo.

8.5 Modello di Heath - Jarrow - Morton

Presentiamo ora il modello di Heath - Jarrow - Morton; questo non é un modello vero e proprio, ma uno schema teorico a cui devono sottostare tutti i modelli di struttura di tassi di interesse che vogliono essere liberi da arbitraggio. Supponiamo che il forward rate soddisfi l'equazione:

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^T \alpha(u,T)\ du + \int_0^T \sigma(f(u,T))\ dW_u$$

Si ricava allora che, sotto la misura di martingala $\mathbf{P}$, α é della forma:

$$\alpha(t,T) = \sigma(f(t,T)) \int_t^T \sigma(f(t,u))\ du$$

e l'equazione del forward rate diventa:

$$df(t,u) = \left(\sigma(f(t,u)) \int_t^u \sigma(f(t,v))\ dv \right)\ dt + \sigma(f(t,u))\ dW_t \tag{8.1}$$

con dato iniziale $f(0,u) = \phi(u) \in C^0([0,T])$. Il teorema seguente, dovuto a Heath - Jarrow - Morton[1], dá delle condizioni sufficienti affinché l'equazione (8.1) abbia un'unica soluzione:

Teorema 8.1 *se la funzione $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é lipschitziana e limitata, allora $\forall \phi \in C^0([0,T])$ esiste un'unico processo a due indici $(f(t,u))_{0 \le t \le u \le T}$ adattato che sia soluzione dell'equazione (8.1).*

8.6 Modello di Musiela

Il modello di Musiela segue esattamente le stesse idee del modello di Heath - Jarrow - Morton, ma cambia leggermente il modo di descrivere il forward rate; questo permette di ricondursi ad una equazione in uno spazio di funzioni reali e di trovare, sotto particolari ipotesi, soluzioni esplicite. Vediamo in dettaglio questo modello.

Chiamiamo **forward rate** un processo $(r(t,x))_t$ (la variabile $x > 0$ verrá considerata un parametro, come nel caso precedente, in un primo tempo) tale che il prezzo $P(t,T)$ all'istante t di una obbligazione scadente all'istante $T = t + x$ sia della forma:

$$P(t,T) = P(t,t+x) = \exp\left(-\int_0^x r(t,u)\ du\right) = \exp\left(-\int_t^{t+x} r(t,u-t)\ du\right)$$

La relazione naturale questa volta é $r(t,0) = r(0)$.

Vogliamo modellizzare il forward rate con un'equazione stocastica del tipo:

$$\begin{cases} dr(t,x) = \alpha(t,x)\ dt + \tau^*(t,x)\ dW_t \\ r(0,x) \text{ dato} \end{cases}$$

α_t e τ_t sono processi a due parametri tali che $\forall x > 0$ abbiamo che $(\alpha(t,x))_t \in \Lambda^1_W$, $(\tau^*(t,x))_t \in \Lambda^2_W$ e $(W_t)_t$ é un moto browniano k-dimensionale standard adattato a $(\mathcal{F}_t)_t$. Ricordiamo che per ora tratteremo x come un semplice parametro, riservandoci poi uno studio piú approfondito.

Il prezzo all'istante t dello zero-coupon bond che scade all'istante T é:

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_0^{T-t} r(t,x)\ dx\right)$$

poiché il fattore di attualizzazione al tempo 0 é:

$$S_0(t) = \exp\left(\int_0^t r(u,0)\ du\right)$$

allora il prezzo attualizzato al tempo 0 di un bond comprato al tempo t con scadenza in T é:

$$\tilde{P}(t,T) = \frac{P(t,T)}{S_0(t)} = \exp\left(\int_0^t r(u,0)\ du - \int_0^{T-t} r(t,x)\ dx\right)$$

Seguiamo ora l'idea che $(\tilde{P}(t,T))_t$ debba essere una martingala locale $\forall T$:

Teorema 8.2 *: se modellizzo il forward rate con una equazione della forma (*), allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

1) $\forall T > 0$ *il processo* $(\tilde{P}(t,T))_t$ *é una martingala locale rispetto a* $\mathbf{P}$.

2) il processo $(r_t(x))_t$ *é tale che l'applicazione* $x \to r(t,x)$ *appartiene ad* $AC([0,+\infty))$ *e:*

$$\alpha(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(r(t,x) + \frac{1}{2}\left|\int_0^x \tau(t,u)\ du\right|^2\right)$$

Per una dimostrazione vedere Musiela[1].

$\square$

Il modello cosí ottenuto per il forward rate é allora il seguente:

$$\begin{cases} dr(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(r(t,x) + \frac{1}{2}\left|\int_0^x \tau(t,u)\ du\right|^2\right)\ dt + \tau^*(t,x)\ dW_t \\ r(0,x) \text{ dato} \end{cases}$$

Se ora non consideriamo x solo un parametro, ma una variabile in $[0,+\infty)$, allora potremo considerare l'equazione di prima una equazione differenziale stocastica a valori nelle funzioni $AC([0,+\infty))$, e precisamente:

$$\begin{cases} dr_t(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(r_t(x) + \frac{1}{2}\left|\int_0^x \tau_t(u)\ du\right|^2\right)\ dt + \tau_t^*(x)\ dW_t \\ r_0(x) \in AC([0,+\infty)) \text{ dato} \end{cases}$$

Tuttavia, questo spazio non é uno spazio di Hilbert, ma puó essere considerato uno spazio di Banach, identificandolo con lo spazio di Sobolev $W^{1,1}$. Il problema é che la teoria dell'integrazione stocastica in spazi di Banach é complessa e ancora frammentaria, per cui ci limiteremo a scegliere un opportuno spazio di Hilbert H in cui studiare il problema; per ora, peró, lasciamo lo spazio H imprecisato, e riformuliamo il problema in questi termini: il forward rate $(r_t(x))_t$ é un processo a valori in uno spazio di Hilbert separabile H, che soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica (chiaramente a valori in H):

$$\begin{cases} dr_t(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(r_t(x) + \frac{1}{2}\left|\int_0^x \tau_t(u)\ du\right|^2\right)\ dt + \tau_t^*(x)\ dW_t \\ r_0(x) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; H) \text{ dato} \end{cases}$$

Se facciamo le ipotesi che $(\mathcal{F}_t)_t$ sia la filtrazione naturale del moto browniano $(W_t)_t$, completata con gli insiemi di misura nulla, e il processo $(\tau_t(x))_t$ é tale che $E[\int_0^T \|\tau_t\|_H\ dt] < +\infty$, allora $(\tilde{P}(t,T))_t$ é una $\mathbf{P}$-martingala, e ogni titolo derivato puó essere rappresentato come somma della sua speranza e di un opportuno integrale stocastico. Questo ci permette di costruire una strategia autofinanziata per il portafoglio che simula il titolo; quindi la speranza puó essere interpretata come il prezzo libero da arbitraggio del titolo.

Vediamo ora un caso in cui ci sono soluzioni esplicite; suppongo che $k = 1$, cioé che $(W_t)_t$ sia un moto browniano reale, e che il processo $\tau_t(x) = \tau(x)$ sia identicamente uguale ad una funzione reale deterministica di x. Allora $(\tilde{P}(t,T))_t$ é una martingala e l'equazione diventa:

$$dr_t(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} r_t(x) + \tau(x)\int_0^x \tau(u)\ du\right)\ dt + \tau(x)\ dW_t$$

Se poniamo:

$$A = \frac{\partial}{\partial x}$$
$$c(x) = \tau(x) \int_0^x \tau(u)\ du$$

allora possiamo riscrivere l'equazione in questo modo:

$$\begin{cases} dr_t(x) = (Ar_t(x) + c(x))\ dt + \tau(x)\ dW_t \\ r_0(x) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; H) \end{cases} \tag{8.2}$$

Se scegliamo uno spazio di Hilbert separabile H, ed imponiamo che $r_0(x)$, $c(x)$ e $\tau(x)$ vi appartengano, e che $A : D(A) \to H$ sia chiuso e sia il generatore infinitesimale del semigruppo:

$$S_t : H \to H,\ \ S_t u(x) = u(x+t)$$

allora la soluzione dell'equazione precedente é un processo di Ornstein-Uhlenbeck nello spazio di Hilbert H:

$$\begin{aligned} r_t(x) &= S_t r_0(x) + \int_0^t S_{t-u} c(x)\ du + \int_0^t S_{t-u}\tau(x)\ dW_u = \\ &= r_0(x+t) + \int_0^t \tau(x+t-u) \left(\int_0^{x+t-u} \tau(v)\ dv \right)\ du + \\ &\quad + \int_0^t \tau(x+t-u)\ dW_u = \\ &= r_0(x+t) + \int_x^{x+t} \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du + \int_0^t \tau(x+t-u)\ dW_u = \\ &= r_0(x+t) + \int_0^{x+t} \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du + \\ &\quad - \int_0^x \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du + \int_0^t \tau(x+t-u)\ dW_u = \\ &= r_0(x+t) + \frac{1}{2} \left(\left(\int_0^{x+t} \tau(u)\ du \right)^2 + \left(\int_0^x \tau(u)\ du \right)^2 \right) + \\ &\quad + \int_0^t \tau(x+t-u)\ dW_u \end{aligned}$$

La soluzione é un processo gaussiano con media:

$$E[r_t](x) = r_0(x+t) + \frac{1}{2} \left(\left(\int_0^{x+t} \tau(u)\ du \right)^2 + \left(\int_0^x \tau(u)\ du \right)^2 \right) \tag{8.3}$$

e covarianza (se $s \leq t$):

$$Cov(r_t(x), r_s(y)) = S_v Cov(r_0, r_0) S_t^* + \int_0^s \tau(x+t-u) \otimes \tau(y+s-u)\ du \tag{8.4}$$

Ci proponiamo ora di studiare questa equazione in due spazi di Hilbert particolari:

$$H = L^2_\gamma([0,+\infty)) = \left\{ u : [0,+\infty) \to \mathbf{R} \mid u \text{ mis. e t. c. } \int_0^{+\infty} u^2(x) e^{-\gamma x} \, dx < +\infty \right\}$$

$$H = L^2([0,+\infty)) = \left\{ u : [0,+\infty) \to \mathbf{R} \mid u \text{ mis. e t. c. } \int_0^{+\infty} u^2(x) \, dx < +\infty \right\}$$

In particolare, esamineremo i seguenti problemi:

- trovare una soluzione esplicita mild

- trovare la legge delle soluzioni e del loro processo

- esistenza e unicitá di misure invarianti per il processo delle soluzioni.

Vediamo il significato intuitivo di quanto stiamo per fare: la scelta degli spazi é giustificata dal fatto che, da osservazioni empiriche, la tipica curva $r_0(x)$, cioé il tipico dato iniziale, é crescente in x, e questo giustifica la scelta dello spazio L^2_γ (dobbiamo permettere al dato iniziale di essere crescente); tuttavia, ci sono dei casi in cui $r_0(x)$ é decrescente, e quindi puó avere senso studiare l'equazione in L^2. Sempre da osservazioni sperimentali, si sa che il tipico $\tau(x)$ é positivo e crescente fino ad un massimo (che in genere si raggiunge per $t = 6$ mesi), per poi decrescere, per tendere a zero all'infinito. Questo fenomeno si riflette nei principali modelli usati in pratica (ad esempio il modello di Vasicek ha $\tau(x) = e^{-\lambda x}$; vedere Vasicek[1]), e infatti constateremo che per avere misure invarianti saranno necessarie e sufficienti delle ipotesi su $\tau(x)$ tali da renderlo verosimile con queste osservazioni sperimentali.

Dobbiamo peró prendere questi risultati con molta cautela: bisogna ricordarsi che il caso da noi considerato é un modello matematico che semplifica di molto il modello originale proposto da Musiela, sostituendo ad un moto browniano multidimensionale uno unidimensionale, ma soprattutto ad un processo una costante. La presenza di un processo nel termine di diffusione renderebbe molto improbabile l'esistenza di una misura invariante nel modello originale.

Infine l'utilitá di avere una misura invariante é discutibile: bisogna infatti considerare che il tipico problema finanziario ha un insieme dei tempi della forma $[0,T]$, e questo potrebbe essere un insieme troppo piccolo affinché le soluzioni siano influenzate dalla presenza della misura invariante; tuttavia, ci sono alcuni autori che si ispirano al principio secondo cui i mercati continueranno ad esistere indefinitamente, senza un istante di termine; ció significa che puó avere un senso prevedere comportamenti asintotici dei fenomeni esaminati.

8.7 Equazione del forward rate nello spazio L^2_γ

Studiamo ora il caso in cui lo spazio di Hilbert é $L^2_\gamma([0,+\infty))$, dotato del prodotto scalare:

$$< u, v >_{L^2_\gamma} = \gamma \int_0^{+\infty} u(x) v(x) e^{-\lambda x} \, dx$$

Bisogna innanzitutto controllare che l'equazione abbia senso in questo spazio. Dobbiamo allora richiedere che $r_0(x) \in L^2_\gamma$, $\tau(x) \in L^2_\gamma$ e $c(x) \in L^2_\gamma$; il calcolo per quest'ultima condizione é laborioso; tuttavia, possiamo trovare delle condizioni sufficienti affinche' questo accada; scopriremo poi che queste condizioni si riveleranno necessarie per l'esistenza di una misura invariante. Se imponiamo che $u \in L^2([0,+\infty))$, allora abbiamo che:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} c^2(x)e^{-\gamma x}\ dx &= \int_0^{+\infty} \tau^2(x)e^{-\gamma x}\left(\int_0^x \tau(u)\ du\right)^2\ dx \leq \\
&\leq \int_0^{+\infty} \tau^2(x)e^{-\gamma x}x\int_0^x \tau^2(u)\ du\ dx \leq \\
&\leq \int_0^{+\infty} \tau^2(x)e^{-\gamma x}x\int_0^{+\infty} \tau^2(u)\ du\ dx \leq \\
&\leq \|\tau\|_{L^2}\int_0^{+\infty} \tau^2(x)\|xe^{-\gamma x}\|_{C^0}\ dx \leq \\
&\leq \|xe^{-\gamma x}\|_{C^0}\|\tau\|^2_{L^2}
\end{aligned}$$

Bisogna inoltre controllare che $A : D(A) \to H$ sia un'operatore chiuso. Il dominio di A é lo spazio di Sobolev:

$$D(A) = W^{1,2}_\gamma([0,+\infty)) = \left\{u \in L^2_\gamma\ \middle|\ u(x) = u_0 + \int_0^x \psi(t)\ dt, \psi \in L^2_\gamma\right\}$$

dotato peró non del suo prodotto scalare, ma di quello di L^2_γ.

Verifichiamo che A é chiuso: $\forall\{f_n\} \subseteq D(A)$ tale che $f_n \to^{L^2_\gamma} f$ e $Af_n = \psi_n \to^{L^2_\gamma} \psi$, allora, siccome $W^{1,2}_\gamma$ é chiuso, e le condizioni sopra significano che $\{f_n\}_n$ é di Cauchy in $W^{1,2}_\gamma$, e quindi $f \in W^{1,2}_\gamma = D(A)$ e $Af = \psi$; quindi l'operatore A é chiuso in H.

Infine bisogna verificare che $(S_t)_t$ é un semigruppo fortemente continuo avente come generatore inifinitesimale A.

Lemma 8.3 : *$(S_t)_t$ é un semigruppo fortemente continuo avente come generatore infinitesimale A.*

Dimostrazione: bisogna innanzitutto controllare le condizioni $1-4$ di semigruppo:

1) $S_t \in L(L^2_\gamma, L^2_\gamma) = L$ e $\|S_t\|_L \leq e^{\frac{\gamma}{2}u}$; infatti se $f \in L^2_\gamma$, allora:

$$\begin{aligned}
\|S_tf(x)\|^2_{L^2_\gamma} &= \int_0^{+\infty} f^2(x+t)e^{-\gamma x}\ dx = e^{\gamma t}\int_0^{+\infty} f^2(x+t)e^{-\gamma(x+t)}\ dx = \\
&= e^{\gamma t}\int_t^{+\infty} f^2(x)e^{-\gamma x}\ dx \leq e^{\gamma t}\|f\|^2_{L^2_\gamma}
\end{aligned}$$

quindi $\|S_t\|_L \leq e^{\gamma t}$.

2-3) verifica banale

4) se $f \in C^0([0,+\infty))$, allora:

$$\lim_{t\to 0} \|S_t f - f\|_{L^2_\gamma} = \lim_{t\to 0} \int_0^{+\infty} (f(t+x) - f(x))^2 e{-}\gamma x \; dx = 0$$

allora, siccome C^0 é denso in L^2_γ, ho che $\forall \varepsilon, \forall g \in L^2_\gamma \; \exists f \in C^0$ tale che $\|f - g\|_{L^2_\gamma} < \varepsilon$; allora:

$$\begin{aligned} \|S_t g - g\|_{L^2_\gamma} &\leq \|S_t g - S_t f\|_{L^2_\gamma} + \|S_t f - f\|_{L^2_\gamma} + \|f - g\|_{L^2_\gamma} \leq \\ &\leq \|S_t\|_L \|f - g\|_{L^2_\gamma} + \varepsilon + \|f - g\|_{L^2_\gamma} \leq (e^{\gamma t} + 2)\varepsilon \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che A é il generatore infinitesimale di $(S_t)_t$; se $f \in D(A) = W^{1,2}_\gamma$, allora $\forall t > 0$ risulta:

$$\begin{aligned} \frac{S_t f - f}{t}(x) &= \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \frac{1}{t} \int_x^{x+t} f'(s) \; ds = \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t f'(x+u) \; du = \frac{1}{t} \int_0^t (S_u A f)(x) \; du \end{aligned}$$

poiché S_t é fortemente continuo in 0, allora l'ultima espressione tende a $S_0 A f = A f$.

□

Abbiamo quindi dimostrato il seguente

Teorema 8.4 *: se $\tau \in L^2_\gamma \cap L^2$, e $r_0 \in L^2_\gamma$, allora esiste un'unica soluzione dell'equazione (8.2), data da:*

$$r_t(x) = r_0(x+t) + \frac{1}{2}\left(\left(\int_0^{x+t} \tau(u) \; du\right)^2 + \left(\int_0^x \tau(u) \; du\right)^2\right) + \int_0^t \tau(x+t-u) \; dW_u \quad (8.5)$$

La soluzione é un processo gaussiano con media (8.3) e covarianza (8.4).

□

Per affrontare il problema di trovare condizioni per l'esistenza di una misura invariante (ed eventualmente per la sua unicitá), usiamo il teorema (6.14).

Controlliamo le condizioni (1) e (2) della proposizione; ho che:

$$Q(x, x') = \tau(x) \otimes \tau(x')$$

$$Q_t(x, x') = \int_0^t (S_u \tau(x)) \otimes (S_u \tau(x')) \; du = \int_0^t \tau(x+u) \otimes \tau(x'+u) \; du$$

Per calcolare la traccia di Q_t ci é utile il seguente lemma:

Lemma 8.5 *: se $T : H \times H \to \mathbf{R}$ é della forma $T = a \otimes b$, con $a, b \in H$, allora:*

$$\mathrm{Tr}\ (T) = < a, b >$$

.

Dimostrazione: Per definizione di traccia abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\ (T) &= \sum_0^\infty {}_n < Te_n, e_n > = \sum_0^\infty {}_n << a, e_n > b, e_n > = \\ &= \sum_0^\infty {}_n < a, e_n >< b, e_n > = < a, b > \end{aligned}$$

□

Abbiamo che:

$$\mathrm{Tr}\ (Q_t) = \int_0^t \|\tau(x+u)\|^2_{L^2_\gamma}\ du$$

Siccome la funzione $t \to \mathrm{Tr}\ (Q_t)$ é crescente in t, allora:

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \mathrm{Tr}\ (Q_t) &= \lim_{t \to +\infty} \mathrm{Tr}\ (Q_t) = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \|\tau(x+u)\|^2_{L^2_\gamma}\ du \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \tau^2(x+u)\ dx\ du = \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \int_0^{+\infty} \tau^2(x+u)\ du\ dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \int_x^{+\infty} \tau^2(u)\ du\ dx \end{aligned}$$

Ora, se $\tau \in L^2([0, +\infty))$, allora l'integrale converge; viceversa, se $\tau \notin L^2([0, +\infty))$, allora affinché l'integrale converga, é necessario che la funzione $x \to \int_x^{+\infty} \tau^2(u)\ du$ sia quasi certamente finita, quindi, siccome é decrescente, che sia finita per $x > 0$. Allora, per ogni $x^* > 0$ fissato, $\int_{x^*}^{+\infty} \tau^2(u)\ du$ é finito, e:

$$\int_0^{x^*} \tau^2(u)\ du = e^{\gamma x^*} \int_0^{x^*} e^{-\gamma x^*} \tau^2(u)\ du \leq e^{\gamma x^*} \int_0^{x^*} e^{-\gamma u} \tau^2(u)\ du$$

che é finito, quindi é necessario che $\tau \in L^2$.

Per trovare una misura invariante per l'equazione

$$dZ_t = (AZ_t + c)\ dt \tag{8.6}$$

tentiamo di trovare una soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} + c$$

indipendente dal tempo, quindi di risolvere l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + c = 0$$

una soluzione di questa é:

$$z(x,t) = z^*(x) = -\int_0^x c(x)\ dx = -\int_0^x \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du$$

controlliamo se $z(t,x) \in L^2_\gamma$:

$$\begin{aligned} |z^*(x)| &= \left|\int_0^x \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du\right| \leq \int_0^x |\tau(u)| \int_0^u |\tau(v)|\ dv\ du \leq \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^x |\tau(u)|\ du\right)^2 \leq \frac{1}{2} x \int_0^x |\tau(u)|^2\ du \leq x\|\tau\|^2_{L^2_\gamma} \end{aligned}$$

allora, se il dato iniziale ha legge δ_{z^*}, allora la soluzione ha legge δ_{z^*} $\forall t \geq 0$, e quindi esiste una misura invariante per l'equazione (8.6). Noto peró che anche le costanti appartengono a L^2_γ, ogni dato iniziale del tipo $\delta_{z^*+d}, d \in \mathbf{R}$ genera una misura invariante sul processo, che viene ad avere una legge marginale δ_{z^*+d} $\forall t \geq 0$. Sembrerebbe quindi che ci siano infinite misure invarianti; una eventuale rappresentazione di tutte sarebbe comunque molto complicata. Se infatti prendiamo per (8.6) un dato iniziale $f \in L^2_\gamma$ con periodo T, allora la soluzione per (Z) é $z(x,t) = f(t+x)$. Allora, se definiamo la variabile aleatoria π : $([0,T], \mathcal{B}([0,T])) \in L^2_\gamma$ tale che $\pi(t) = f(.+t)$ e mettiamo la densitá uniforme su $[0,T]$, allora π induce una misura μ_f su L^2_γ tale che, se il dato iniziale ha legge μ_f, allora otteniamo una misura invariante con legge μ_f $\forall t \geq 0$. Ci fermiamo quindi qui e riassumiamo i risultati ottenuti nel seguente:

Teorema 8.6 *: data l'equazione (8.2) nello spazio di Hilbert L^2_γ, condizione necessaria e sufficiente per avere una misura invariante é:*

$$\tau(x) \in L^2_\gamma([0,+\infty)) \cap L^2([0,+\infty))$$

ed esistono infinite misure invarianti; in particolare le misure della forma:

$$\delta_{z^*+c} * N(0, Q_\infty), c \in \mathbf{R}$$

$$\mu_f * N(0, Q_\infty), f \in L^2_\gamma \text{ periodica}$$

sono misure invarianti, dove:

$$Q_\infty = \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \int_x^{+\infty} \tau^2(u)\ du\ dx$$

$$z^*(x) = -\int_0^x \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du$$

$f \in L^2_\gamma$ é periodica di periodo T e μ_f é la misura immagine della densitá uniforme su $[0,T]$ tramite l'applicazione $t \to f(t+.)$.

□

8.8 Equazione del forward rate nello spazio L^2

Studiamo ora il caso in cui $H = L^2([0,+\infty))$. Affinché l'equazione abbia senso dobbiamo avere che $\tau \in L^2$, $c \in L^2$ e A sia un operatore chiuso da $D(A)$ in L^2 che genera un semigruppo fortemente continuo. Controlliamo la seconda e la terza condizione. Come nell'altro caso, per $c \in L^2$ diamo una condizione sufficiente, che si rivelerá necessaria per avere una misura invariante.

$$\int_0^{+\infty} \tau^2(x) \left(\int_0^x \tau(u)\ du\right)^2\ dx = \int_0^{+\infty} \tau^2(x) x \int_0^x \tau(u)^2\ du\ dx \leq \int_0^{+\infty} \tau^2(x) x\ dx \|\tau\|_{L^2}$$

quindi una condizione sufficiente perché c stia in L^2 é che $\sqrt{u}\tau(u) \in L^2$.
Dobbiamo verificare che $A : D(A) \to L^2$ é chiuso. Il dominio di A in L^2 é:

$$D(A) = W^{1,2}([0,+\infty)) = \left\{ u \in L^2 \ \middle|\ u(x) = u_0 + \int_0^x \psi(t)\ dt, \psi \in L^2 \right\}$$

dotato del prodotto scalare di L^2. Si verifica che A é chiuso con un ragionamento analogo al caso precedente

Verifichiamo, come prima, che $(S_t)_t$ é un semigruppo fortemente continuo avente come generatore infinitesimale A.

Lemma 8.7 *: $(S_t)_t$ é un semigruppo fortemente continuo avente come generatore infinitesimale A.*

Dimostrazione: bisogna controllare le condizioni $1-4$ di semigruppo.
1) $S_t \in L(L^2, L^2) = L$ e $\|S_t\|_L \leq 1$; infatti se $f \in L^2$, allora:

$$\begin{aligned} \|S_t f(x)\|^2_{L^2} &= \int_0^{+\infty} f^2(x+t)\ dx = \int_t^{+\infty} f^2(x)\ dx \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} f^2(x)\ dx = \|f\|^2_{L^2} \end{aligned}$$

quindi $\|S_t\|_L \leq 1$.

2-3) verifica banale

4) se $f \in C^0([0,+\infty))$, allora la tesi segue da un argomento di densitá analogo a quello del caso $H = L^2_\gamma$.

La verifica che A é generatore infinitesimale di $(S_t)_t$ é analoga al caso $H = L^2_\gamma$

$\square$

Abbiamo dimostrato il

Teorema 8.8 *: se $\tau(x) \in L^2([0,+\infty))$, $\sqrt{x}\tau(x) \in L^2([0,+\infty))$ e $r_0 \in L^2([0,+\infty))$, allora l'equazione (8.2) ha un'unica soluzione in L^2, data da (8.5), che é un processo gaussiano con media (8.3) e covarianza (8.4).*

$\square$

Controlliamo stavolta le condizioni (1) e (3) della proposizione (6.14). Come prima, abbiamo che:

$$Q(x,x') = \tau(x) \otimes \tau(x')$$

$$Q_t(x,x') = \int_0^t \tau(x+u) \otimes \tau(x'+u)\ du$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\ (Q_t) &= \int_0^t \|\tau(.+u)\|^2_{L^2}\ du = \int_0^t \int_0^{+\infty} \tau^2(x+u)\ dx\ du = \\ &= \int_0^t \int_u^{+\infty} \tau^2(x)\ dx\ du \end{aligned}$$

$$\sup tr(Q_t) = \int_0^{+\infty} \int_u^{+\infty} \tau^2(x)\ dx\ du = \int_0^{+\infty} \tau^2(x) \int_0^x\ du\ dx = \int_0^{+\infty} \tau^2(x)x\ dx$$

quindi la condizione $\sqrt{x}\tau(x) \in L^2$ é necessaria per avere una misura invariante.

Controlliamo ora il punto (3). L'immagine di A in L^2 é:

$$Im(A) = \left\{ \psi \in L^2\ \mid \exists z_0 \in \mathbf{R} \text{ tale che } z(x) = z_0 + \int_0^x \psi(t)\ dt \in L^2 \right\}$$

Abbiamo giá controllato che $c(x) = \tau(x)\int_0^x \tau(u)\ du \in L^2$. Bisogna ora controllare che c sia la derivata debole di una funzione in L^2, e in particolare:

$$z(x) = z_0 + \int_0^x \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du = z_0 + \frac{1}{2}\left(\int_0^x \tau(u)\ du\right)^2$$

z é una funzione crescente; allora $z \in L^2$ solo se $\lim_{x\to+\infty} z(x) = 0$. Questo determina z_0:

$$\lim_{x\to+\infty} z(x) = z_0 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\int_0^x \tau(u)\ du\right)^2$$

le condizioni necessarie perché questo limite sia uguale a 0 sono che $\tau \in L^1$ e che $z_0 = -\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} \tau(u)\ du\right)^2$. Vediamo ora sotto che condizioni z puó appartenere ad L^2:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} z^2(x)\ dx &= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\left(\int_0^{+\infty}\tau(u)\ du\right)^2 - \left(\int_0^x \tau(u)\ du\right)^2\right)^2\ dx = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\tau(u)\ du\right)^2\left(\int_0^x \tau(u)\ du + \int_0^{+\infty}\tau(u)\ du\right)^2 dx = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\tau(u)\ du\right)^2\left(\int_0^x \tau(u)\ du\right)^2\ dx + \\
&\quad +\frac{1}{2}\|\tau\|_{L^1}^2\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\tau(u)\ du\right)^2\left(\int_0^x \tau(u)\ du\right)\ dx \\
&\quad +\frac{1}{4}\|\tau\|_{L^1}^2\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\tau(u)\ du\right)^2\ dx \leq \\
&\leq \|\tau\|_{L^1}^2\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\tau(u)\ du\right)^2\ dx
\end{aligned}$$

Dal penultimo passaggio si ricava che la condizione $\int_x^{+\infty}\tau(u)\ du \in L^2$ é necessaria perché $z \in L^2$; in virtú dell'ultimo passaggio, questa condizione é anche sufficiente.

Se questa condizione é verificata, allora ogni misura invariante é della forma:

$$\mu = \nu * \delta_b * N(0, Q_\infty)$$

dove $b \in D(A)$ é tale che $Ab = -c$, e ν é una misura invariante per il sistema:

$$dZ_t = (AZ_t)\ dt \tag{8.7}$$

allora $b(x) = -z(x)$ é l'unica funzione che verifica la condizione su b. Cerchiamo ora misure invarianti per l'equazione (8.7). Innanzitutto cerchiamo soluzioni aventi come legge una delta di Dirac; ció equivale a risolvere l'equazione differenziale:

$$\begin{cases} z' = Az \\ z_0 \in L^2 \end{cases}$$

la cui soluzione é $S_t z_0$, cioé: $z(x,t) = z_0(x+t)$. Siccome voglio una soluzione stazionaria, devo avere che $S_t z_0 = z_0$, cioé $z_0 = \text{cost.}$; ma l'unica funzione costante in L^2 é zero, e quindi l'unica misura invariante della forma δ_z é δ_0.

Vogliamo dimostrare che questa é l'unica misura invariante per (8.7). A questo proposito notiamo che in questo caso l'operatore P_t é il seguente:

$$\forall \phi \in B_b(H), (P_t)(f) = E[\phi(u_t(f))] = E[\phi(S_t f)] = \phi(S_t f)$$

Possiamo utilizzare il lemma dell'altra sezione; per farlo usiamo i due lemmi:

Lemma 8.9 *: se $f \in L^2$, allora $P_t^* \delta_f = \delta_{S_t f}$.*

Dimostrazione: $\forall B \in \mathcal{H}$ ho che:

$$\begin{aligned}
(P_t^* \delta_f)(B) &= < \mathbf{1}_B, P_t^* \delta_f >=< P_t \mathbf{1}_B, \delta_f >= (P_t \mathbf{1}_B)(f) = E[\mathbf{1}_B(S_t f)] = \\
&= \mathbf{1}_B(S_t f) =< \mathbf{1}_B, \delta_{S_t f} >= \delta_{S_t f}(B)
\end{aligned}$$

□

Lemma 8.10 *: se H é uno spazio di Hilbert, e $f_t \to f$ in norma, allora $\delta_{f_t} \to^{deb} \delta_f$.*

Dimostrazione: controlliamo che $\forall \phi \in C_b(H)$, $\forall f \in H$ si ha:

$$\int_H \phi(x)\ d\delta_f(x) = \phi(f)$$

ma, poiché $\phi \in C_b(H)$, allora $\forall \varepsilon\ \exists \delta$ tale che:

$$\|f_t - f\|_H < \delta \Rightarrow |\phi(f_t) - \phi(f)| < \varepsilon$$

siccome $f_t \to^H f$, allora $\phi(f_t) \to \phi(f)$, cioé:

$$\int_H \phi(x)\ d\delta_{f_t}(x) = \phi(f_t) \to \int_H \phi(x)\ d\delta_f(x) = \phi(f)$$

□

Poiché $\forall f \in L^2, \lim_{t \to +\infty} S_t f = 0$, i due lemmi precedenti implicano che $P_t^* \delta_f \to^{deb.} \delta_0$ $\forall f \in L^2$, e quindi, in virtú della proposizione (6.13), che δ_0 é l'unica misura invariante per l'equazione.

Abbiamo quindi dimostrato il seguente:

Teorema 8.11 *: data l'equazione (8.2) nello spazio di Hilbert L^2, condizioni necessarie e sufficienti per avere una misura invariante sono:*

$$\begin{gathered}
\tau(x) \in L^2([0, +\infty)) \\
\sqrt{x}\tau(x) \in L^2([0, +\infty)) \\
\tau(x) \in L^1([0, +\infty))
\end{gathered}$$

$$\int_x^{+\infty} \tau(u)\ du \in L^2([0,+\infty))$$

in queste ipotesi esiste l'unica misura invariante:

$$\delta_{z^*+z_0} * \delta_0 * N(0, Q_\infty) = N(z^* + z_0, Q_\infty)$$

dove:

$$z^*(x) + z_0 = \int_0^x \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du - \int_0^{+\infty} \int_0^\infty \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du$$

$$Q_\infty = \int_0^{+\infty} \tau^2(x) x\ dx$$

□

8.9 Problemi aperti

La discussione precedente voleva solo essere esemplificativa delle proprietá dell'equazione del forward rate proposta da Musiela; rimangono molti problemi aperti, e ne citiamo ora alcuni:

1) Cercare una eventuale soluzione esplicita dell'equazione di Ornstein - Uhlenbeck nel caso in cui c e τ siano non piú delle costanti nello spazio di Hilbert, ma degli opportuni processi a valori in uno spazio di Hilbert H opportuno.

2) Cercare soluzioni dell'equazione ed eventuali misure invarianti nei casi in cui $H = W^{1,2}_\gamma([0,+\infty))$ o $H = W^{1,2}([0,+\infty))$.

3) Delle innumerevoli misure invarianti trovate in $L^2_\gamma([0,+\infty))$, trovare quale potrebbe essere la piú "plausibile"; un metodo per questo é quello di sostituire l'operatore $A = \frac{\partial}{\partial x}$ con l'operatore $A' = \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, trovare la (o le) misure invarianti per questo operatore, e vedere cosa succede quando $\varepsilon \to 0$.