Indice

1 Preliminari **6**

1.1 Richiami sugli spazi probabilizzati 6
1.2 Convergenze di variabili aleatorie 8
1.3 Indipendenza 9
1.4 Teorema delle classi monotone 9
1.5 Teorema di Radon - Nikodym 9
1.6 Leggi normali sulla retta 10
1.7 Variabili aleatorie in spazi di Hilbert 10
1.8 Speranza condizionale 11

2 Processi stocastici **12**

2.1 Definizioni e proprietá 12
2.2 Processi gaussiani 14
2.3 Tempi di arresto 15
2.4 Martingale 16
2.5 Martingale locali 17
2.6 Il moto browniano 18
2.7 Costruzione di un moto browniano 19
2.8 Moto browniano $k-$dimensionale 20

3 Integrale stocastico rispetto ad un moto browniano **21**

3.1 Preliminari 21
3.2 Integrale stocastico dipendente dal parametro d'integrazione 27
3.3 Integrale stocastico rispetto ad un moto browniano $k-$dimensionale 29
3.4 Integrale stocastico di una funzione deterministica 31

4 Differenziale stocastico e sue proprietá **34**

4.1 Definizione e prime proprietá 34
4.2 Formula di Ito 38
4.3 Il teorema di Girsanov 41
4.4 Teorema di rappresentazione delle martingale 44

5 Equazioni differenziali stocastiche **47**
5.1 Teorema di esistenza e unicitá 48
5.2 Dipendenza dal dato iniziale 50
5.3 Equazioni lineari 52
5.4 Processo di Ornstein - Uhlenbeck 54
5.5 Legge delle soluzioni di una equazione differenziale stocastica 63
5.6 Equazioni alle derivate parziali legate ad una equazione differenziale stocastica 65

6 Processi di Ornstein - Uhlenbeck a valori in spazi di Hilbert **69**
6.1 Semigruppi di operatori lineari 69
6.2 Integrale di Bochner 71
6.3 Processi di Ornstein - Uhlenbeck a valori in spazi di Hilbert 72

7 Fondamenti di Finanza Matematica **79**
7.1 Un primo modello deterministico 79
7.2 Leggi finanziarie 81
7.3 Analisi dimensionale delle grandezze finanziarie 83
7.4 Un modello deterministico di mercato obbligazionario 84
7.5 Obbligazioni a cedola nulla 86
7.6 Modello di Harrison - Kreps per i mercati 88
7.7 Introduzione ai mercati finanziari 94
7.8 Obbligazioni a cedola nulla: caso stocastico 95
7.9 Un modello stocastico per i mercati finanziari 97
7.10 Modello di mercato con prezzi dei titoli continui 103
7.11 Valutazione dei titoli derivati 105
7.12 Modello di Black-Scholes 108
7.13 Valutazione delle opzioni europee 109

8 Modelli di struttura dei tassi di interesse **114**
8.1 Modelli di struttura dei tassi di interesse basati sullo spot rate 114
8.2 Il modello di Vasicek 115
8.3 Il modello di Cox - Ingersoll - Ross (CIR) 115
8.4 Modelli di struttura dei tassi di interesse basati sul forward rate 116
8.5 Modello di Heath - Jarrow - Morton 117
8.6 Modello di Musiela 117
8.7 Equazione del forward rate nello spazio L^2_γ 121
8.8 Equazione del forward rate nello spazio L^2 126
8.9 Problemi aperti 130

Bibliografia