Prefazione

In questa tesi abbiamo cercato di presentare una panoramica sull'integrale stocastico rispetto ad un moto browniano m-dimensionale, e sulle equazioni differenziali stocastiche in dimensione finita, con particolare attenzione alle equazioni lineari ed all'equazione di Ornstein - Uhlenbeck. Inoltre, abbiamo inserito una sezione sulla risoluzione dell'equazione di Ornstein - Uhlenbeck in uno spazio di Hilbert separabile.

Ci siamo poi concentrati su una scienza in cui questi strumenti matematici sono molto utilizzati, che é la Finanza Matematica moderna; abbiamo prima fornito una introduzione alle principali problematiche, per poi concentrare la nostra attenzione sui modelli di struttura dei tassi di interesse, ed in particolare su un nuovo modello, dovuto a Musiela, che si basa sulle stesse idee di assenza di arbitraggio su cui si basa il modello di Heath - Jarrow - Morton (vedere Heath - Jarrow - Morton[1]).

Presentiamo ora piú in dettaglio la tesi: vi é una introduzione in cui vengono enunciati i principi di Calcolo delle Probabilitá da cui si parte; vi é poi una breve presentazione dei processi stocastici a tempi continui, ed in particolare dei processi gaussiani, delle martingale e del moto browniano.

Si entra poi nel vivo, presentando l'integrale stocastico rispetto ad un moto browniano, detto anche integrale di Ito, e le sue proprietá.

Il capitolo successivo é uno studio di alcune proprietá dei cosiddetti processi di Ito, che risulteranno poi molto utili quando si applicherá questa teoria al modello che useremo nella parte finanziaria. In particolare, viene presentata la nozione di differenziale stocastico, la sua unicitá, la formula di trasformazione dei differenziali stocastici (detta anche formula di Ito), il teorema di Girsanov ed il teorema di rappresentazione delle martingale adattate alla filtrazione naturale del moto browniano.

Si passa poi a studiare le equazioni differenziali stocastiche; vengono date le definizioni di soluzione forte e di unicitá in traiettorie della soluzione, e viene presentato il teorema di esistenza e unicitá classico, con ipotesi di lipschitzianitá e di crescita sublineare dei coefficienti; viene poi fornita una stima sulle soluzioni. Vengono poi date le soluzioni esplicite delle equazioni lineari e di Ornstein - Uhlenbeck; per quest'ultima equazione é stato fatto anche uno studio della legge del processo delle soluzioni, e vengono presentate delle condizioni necessarie e sufficienti affinché ci siano soluzioni stazionarie; viene poi costruita esplicitamente una soluzione stazionaria, attraverso un integrale stocastico, non piú rispetto ad un moto browniano, ma rispetto ad un nuovo processo, chiamato moto browniano esteso, con proprietá molto simili. Viene poi presentata una analisi della legge della soluzione di

una generica equazione (ammettente un'unica soluzione), e vengono presentate le classiche equazioni alle derivate parziali utili a risolvere questo problema, cioé l'equazione backward e l'equazione forward di Kolmogorov.

A questo punto vi é una breve introduzione ai semigruppi fortemente continui di operatori lineari in spazi di Hilbert separabili, che servirá a fornire la soluzione esplicita all'equazione di Ornstein - Uhlenbeck in spazi di Hilbert; anche in questo caso lo studio dell'equazione viene corredata da una presentazione di alcuni criteri affinché la legge delle soluzioni sia stazionaria.

Si passa ora alla parte finanziaria. All'inizio vengono presentati i due postulati su cui si basa la Finanza Matematica, e viene presentato un semplice modello deterministico, che é un modello di mercato obbligazionario, che servirá come presentazione delle idee intuitive che stanno alla base delle ipotesi comunemente fatte nel caso stocastico. In particolare, viene fatto il punto sull'ipotesi di non arbitraggio, che, quando ci si mette nel contesto aleatorio usando uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, ci porta alla condizione equivalente che esista una misura di probabilitá $\mathbf{P}^*$, equivalente a $\mathbf{P}$, che renda delle martingale i prezzi attualizzati dei titoli. In particolare, viene presentato il modello comunemente usato per rappresentare un mercato finanziario in cui siano presenti un titolo non rischioso e d titoli rischiosi, e si danno delle condizioni sufficienti affinché il mercato sia completo e privo di arbitraggi; infine vengono analizzati dei particolari titoli derivati, cioé le opzioni call e put europee, presentando metodi per prezzarli e simularli. Come esempio, é stato sempre tenuto presente il modello di Black - Scholes (vedere Black - Scholes[1]), con le equazioni a coefficienti costanti, il cui lavoro é stato il primo, insieme a quello di Merton (vedere Merton[1]), a fornire formule esplicite per il prezzo delle opzioni e per la strategie simulanti.

Vengono infine brevemente presentati i principali modelli di struttura dei tassi d'interesse utilizzati in pratica; si inizia con due modelli di spot rate, il modello di Vasicek (vedere Vasicek[1]) e il modello di Cox - Ingersoll - Ross (vedere Cox - Ingersoll - Ross[1]), per poi passare a modelli generali di struttura dei forward rates; piú in dettaglio, si presenta il modello di Heath - Jarrow - Morton, e si analizza il modello di Musiela (vedere Musiela[1]). Questo modello costituisce il punto di arrivo della tesi, in cui confluiscono soprattutto i preliminari matematici sulle equazioni di Ornstein - Uhlenbeck in spazi di Hilbert sviluppati prima. Il modello di Musiela viene analizzato matematicamente in modo piú esteso rispetto al lavoro originale, con l'uso del calcolo stocastico in spazi di Hilbert. Vengono poi fornite condizioni sufficienti sul termine di diffusione affinché l'equazione avesse soluzione negli spazi di Hilbert separabili $L^2([0,+\infty))$ e $L^2_\gamma([0,+\infty))$, e fornite inoltre, per entrambi gli spazi, condizioni necessarie e sufficienti affinché le soluzioni siano stazionarie.

Questi risultati fanno emergere ulteriori questioni aperte, che sono enunciate al termine della tesi.