Prefazione

In questa tesi abbiamo cercato di presentare una panoramica sull'integrale stocastico rispetto ad un moto browniano m-dimensionale, e sulle equazioni differenziali stocastiche in dimensione finita, con particolare attenzione alle equazioni lineari ed all'equazione di Ornstein - Uhlenbeck. Inoltre, abbiamo inserito una sezione sulla risoluzione dell'equazione di Ornstein - Uhlenbeck in uno spazio di Hilbert separabile.

Ci siamo poi concentrati su una scienza in cui questi strumenti matematici sono molto utilizzati, che é la Finanza Matematica moderna; abbiamo prima fornito una introduzione alle principali problematiche, per poi concentrare la nostra attenzione sui modelli di struttura dei tassi di interesse, ed in particolare su un nuovo modello, dovuto a Musiela, che si basa sulle stesse idee di assenza di arbitraggio su cui si basa il modello di Heath - Jarrow - Morton (vedere Heath - Jarrow - Morton[1]).

Presentiamo ora piú in dettaglio la tesi: vi é una introduzione in cui vengono enunciati i principi di Calcolo delle Probabilitá da cui si parte; vi é poi una breve presentazione dei processi stocastici a tempi continui, ed in particolare dei processi gaussiani, delle martingale e del moto browniano.

Si entra poi nel vivo, presentando l'integrale stocastico rispetto ad un moto browniano, detto anche integrale di Ito, e le sue proprietá.

Il capitolo successivo é uno studio di alcune proprietá dei cosiddetti processi di Ito, che risulteranno poi molto utili quando si applicherá questa teoria al modello che useremo nella parte finanziaria. In particolare, viene presentata la nozione di differenziale stocastico, la sua unicitá, la formula di trasformazione dei differenziali stocastici (detta anche formula di Ito), il teorema di Girsanov ed il teorema di rappresentazione delle martingale adattate alla filtrazione naturale del moto browniano.

Si passa poi a studiare le equazioni differenziali stocastiche; vengono date le definizioni di soluzione forte e di unicitá in traiettorie della soluzione, e viene presentato il teorema di esistenza e unicitá classico, con ipotesi di lipschitzianitá e di crescita sublineare dei coefficienti; viene poi fornita una stima sulle soluzioni. Vengono poi date le soluzioni esplicite delle equazioni lineari e di Ornstein - Uhlenbeck; per quest'ultima equazione é stato fatto anche uno studio della legge del processo delle soluzioni, e vengono presentate delle condizioni necessarie e sufficienti affinché ci siano soluzioni stazionarie; viene poi costruita esplicitamente una soluzione stazionaria, attraverso un integrale stocastico, non piú rispetto ad un moto browniano, ma rispetto ad un nuovo processo, chiamato moto browniano esteso, con proprietá molto simili. Viene poi presentata una analisi della legge della soluzione di una generica equazione (ammettente un'unica soluzione), e vengono presentate le classiche equazioni alle derivate parziali utili a risolvere questo problema, cioé l'equazione backward e l'equazione forward di Kolmogorov.

A questo punto vi é una breve introduzione ai semigruppi fortemente continui di operatori lineari in spazi di Hilbert separabili, che servirá a fornire la soluzione esplicita all'equazione di Ornstein - Uhlenbeck in spazi di Hilbert; anche in questo caso lo studio dell'equazione viene corredata da una presentazione di alcuni criteri affinché la legge delle soluzioni sia stazionaria.

Si passa ora alla parte finanziaria. All'inizio vengono presentati i due postulati su cui si basa la Finanza Matematica, e viene presentato un semplice modello deterministico, che é un modello di mercato obbligazionario, che servirá come presentazione delle idee intuitive che stanno alla base delle ipotesi comunemente fatte nel caso stocastico. In particolare, viene fatto il punto sull'ipotesi di non arbitraggio, che, quando ci si mette nel contesto aleatorio usando uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, ci porta alla condizione equivalente che esista una misura di probabilitá $\mathbf{P}^*$, equivalente a $\mathbf{P}$, che renda delle martingale i prezzi attualizzati dei titoli. In particolare, viene presentato il modello comunemente usato per rappresentare un mercato finanziario in cui siano presenti un titolo non rischioso e d titoli rischiosi, e si danno delle condizioni sufficienti affinché il mercato sia completo e privo di arbitraggi; infine vengono analizzati dei particolari titoli derivati, cioé le opzioni call e put europee, presentando metodi per prezzarli e simularli. Come esempio, é stato sempre tenuto presente il modello di Black - Scholes (vedere Black - Scholes[1]), con le equazioni a coefficienti costanti, il cui lavoro é stato il primo, insieme a quello di Merton (vedere Merton[1]), a fornire formule esplicite per il prezzo delle opzioni e per la strategie simulanti.

Vengono infine brevemente presentati i principali modelli di struttura dei tassi d'interesse utilizzati in pratica; si inizia con due modelli di spot rate, il modello di Vasicek (vedere Vasicek[1]) e il modello di Cox - Ingersoll - Ross (vedere Cox - Ingersoll - Ross[1]), per poi passare a modelli generali di struttura dei forward rates; piú in dettaglio, si presenta il modello di Heath - Jarrow - Morton, e si analizza il modello di Musiela (vedere Musiela[1]). Questo modello costituisce il punto di arrivo della tesi, in cui confluiscono soprattutto i preliminari matematici sulle equazioni di Ornstein - Uhlenbeck in spazi di Hilbert sviluppati prima. Il modello di Musiela viene analizzato matematicamente in modo piú esteso rispetto al lavoro originale, con l'uso del calcolo stocastico in spazi di Hilbert. Vengono poi fornite condizioni sufficienti sul termine di diffusione affinché l'equazione avesse soluzione negli spazi di Hilbert separabili $L^2([0, +\infty))$ e $L^2_\gamma([0, +\infty))$, e fornite inoltre, per entrambi gli spazi, condizioni necessarie e sufficienti affinché le soluzioni siano stazionarie.

Questi risultati fanno emergere ulteriori questioni aperte, che sono enunciate al termine della tesi.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare tutti coloro che hanno contribuito, con consigli e critiche, alla realizzazione di questa tesi. Oltre agli ovvi ringraziamenti ai professori Franco Flandoli e Maurizio Pratelli, ringrazio anche (in rigoroso ordine alfabetico): Marco Caldarelli, i responsabili del Centro di Calcolo del dipartimento di Matematica dell'Universitá di Perugia, i responsabili del Corso Estivo di Matematica 1995 della Scuola Matematica Interuniversitaria, la dott.ssa Benedetta Ferrario, il prof. Nicola Fusco, il prof. David Heath, il dott. Stefano Herzel, Maria Luisa Lispi, la dott.ssa Loretta Mastroeni, la dott.ssa Sabrina Mulinacci, il dott. Claudio Pacati, Alessandra Patrono, Patrizia Toscano, il prof. Jerzy Zabczyk.

Tiziano Vargiolu

Indice

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Richiami sugli spazi probabilizzati

Ricordiamo che uno **spazio misurabile** é una coppia $(E, \mathcal{E})$, dove E é un insieme, e $\mathcal{E}$ é una σ-algebra di parti di E. Con il simbolo $\sigma(\mathcal{G})$ indicheremo la σ-algebra generata dagli elementi della classe $\mathcal{G}$, che é anche la minima σ-algebra contenente $\mathcal{G}$.

Se E é uno spazio metrico, é molto frequente scegliere come $\mathcal{E}$ la seguente classe, chiamata **σ-algebra boreliana** o **tribú boreliana** di E:

$$\mathcal{B}(E) = \sigma(B(x, \varepsilon), x \in E, \varepsilon > 0)$$

dove $B(x, \varepsilon)$ é la palla aperta di centro x e raggio ε.

Ricordiamo inoltre che uno **spazio probabilizzato** é una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, dove Ω é un insieme, $\mathcal{F}$ é una σ-algebra, anche detta **tribú**, di Ω, e $\mathbf{P}$ é una misura positiva su $\mathcal{F}$ tale che $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, chiamata **misura di probabilitá**, o anche piú semplicemente **probabilitá**.

Una applicazione misurabile $X : \Omega \to E$ si chiama **variabile aleatoria**. Se su Ω vi é giá una misura $\mathbf{P}$, la variabile aleatoria X induce una misura su E, chiamata **misura immagine** di $\mathbf{P}$ mediante X, definita da $X(\mathbf{P})(B) = \mathbf{P}\{X \in B\}\ \forall B \in \mathcal{E}$. Se $(E, \mathcal{E}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$, allora X si dice **variabile aleatoria reale**. Allora, se X é integrabile, si puó definire l'integrale di X, o **speranza** di X, che si scrive $\int_\Omega X\, d\mathbf{P}$ o $E[X]$. Si possono poi definire i seguenti spazi:

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{X : \Omega \to \mathbf{R} \text{ v.al.} \mid E[|X|^p] < +\infty\}$$

con $1 \leq p < +\infty$, e:

$$L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = \{X : \Omega \to \mathbf{R} \text{ v.al.} \mid \exists K \text{ tale che } |X| < K \text{ q.c.}\}$$

Ricordiamo che gli spazi L^p sono spazi di Banach con la norma $\|X\|_{L^p} = (E[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$, e L^∞ é un Banach con la norma $\|X\|_{L^\infty} = supess|X| = \inf\{K \in \mathbf{R} \mid |X| \leq K \text{ q.c.}\}$. Inoltre L^2 é uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare $< X, Y >_{L^2} = E[X.Y]$.

Se $(E, \mathcal{E}) = (\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$, allora X si dice **variabile aleatoria reale n-dimensionale**. Anche qui, se tutte le componenti sono integrabili, possiamo definire l'integrale in questo modo:

$$\int_\Omega X \, d\mathbf{P} = \left(\int_\Omega X_1 \, d\mathbf{P}, ..., \int_\Omega X_n \, d\mathbf{P} \right)$$

che puó anche in questo caso venire chiamato speranza ed indicato con $E[X] = (E[X_1], ..., E[X_n])$.

Valgono le seguenti relazioni:

Disuguaglianza di Markov (di Markov generalizzata): se X é una variabile aleatoria, allora $\forall p > 0$ vale:

$$\mathbf{P}\{|X| \geq a\} \leq \frac{E[|X|]}{a} \qquad \left(\mathbf{P}\{|X| \geq a\} \leq \frac{E[|X|^p]}{a^p} \right)$$

Disuguaglianza di Jensen: se X é una variabile aleatoria integrabile n-dimensionale, e $\phi : \mathbf{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ é convessa, allora $\phi(X)$ é semi-integrabile inferiormente e:

$$\phi(E[X]) \leq E[\phi(X)]$$

Disuguaglianza di Hölder: se X e Y sono variabili aleatorie, e $\alpha, \beta \geq 0$ tali che $\alpha + \beta = 1$, allora:

$$E[|X|^\alpha |Y|^\beta] \leq E[|X|]^\alpha E[|Y|]^\beta$$

Un caso particolare di questa disuguaglianza, ottenuta con $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, é la seguente:
Disuguaglianza di Cauchy - Schwartz: se X e Y sono variabili aleatorie, allora:

$$E[|X||Y|] \leq \sqrt{E[|X|^2] E[|Y|^2]}$$

Da ció si ricava che, se $p > q$, allora $L^p \subseteq L^q$, e $\|X\|_{L^q} \leq \|X\|_{L^p}$.

Se X, Y sono variabili aleatorie n-dimensionali, si chiama **matrice delle covarianze** di X, Y, o piú semplicemente **covarianza**, la matrice:

$$C = Cov(X, Y) = (Cov(X, Y))_{ij} = (E[(X_i - E[X_i])(Y_j - E[Y_j]))_{ij}$$

Se $n = 1$, possiamo definire **varianza** di X il numero $Var[X] = Cov(X, X)$, che é finito se e solo se $X \in L^2$.

1.2 Convergenze di variabili aleatorie

In questo paragrafo, E sará sempre uno spazio metrico dotato della distanza d e misurabile se dotato della tribú boreliana $\mathcal{B}(E)$.

Diciamo che una successione $\{\mu_n\}_n$ di misure converge **debolmente** a μ (che si indica con $\mu_n \longrightarrow^{deb.} \mu$) se, per ogni funzione $f : E \to \mathbf{R}$ continua e limitata, vale:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f \; d\mu_n = \int_E f \; d\mu$$

Siano ora $X, X_n, n \in N$ variabili aleatorie da Ω a valori in E, e definiamo quattro tipi di convergenze; diciamo che X_n converge a X:

- **quasi certamente** ($X_n \longrightarrow^{q.c.} X$) se $\exists A \in \mathcal{F}$ trascurabile tale che

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \; \forall \omega \in A^c$$

- **in** L^p ($X_n \longrightarrow^{L^p} X$) se $X_n, X \in L^p$ e:

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_{L^p} = 0$$

- **in probabilitá** ($X_n \longrightarrow^{\mathbf{P}} X$) se $\forall \varepsilon > 0$ abbiamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{d(X_n, X) > \varepsilon\} = 0$$

- **in legge** ($X_n \longrightarrow^{legge} X$) se, chiamate $\mu_n = X_n(\mathbf{P})$, $\mu = X(\mathbf{P})$, abbiamo che $\mu_n \longrightarrow^{deb.} \mu$.

Vale il seguente risultato:

Proposizione 1.1 *se X_n, X sono variabili aleatorie, allora:*
1) se $X_n \longrightarrow^{q.c.} X$, allora $X_n \longrightarrow^{\mathbf{P}} X$
2) se $X_n \longrightarrow^{L^p} X$, allora $X_n \longrightarrow^{\mathbf{P}} X$
3) se $X_n \longrightarrow^{\mathbf{P}} X$, allora $X_n \longrightarrow^{legge} X$
4) se $X_n \longrightarrow^{\mathbf{P}} X$, allora esiste una sottosuccessione $(X_{n_k})_k$ tale che $X_{n_k} \longrightarrow^{q.c.} X$.

□

Enunciamo inoltre il seguente criterio di convergenza in probabilitá:

Proposizione 1.2 *se X_n é una successione a valori in uno spazio metrico completo $(E, \mathcal{E})$; allora esiste una v. al. X a valori in E tale che $X_n \longrightarrow^{\mathbf{P}} X$, se e solo se $\forall \varepsilon > 0, \delta > 0$, esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\forall m, n \geq \nu$ si ha:*

$$\mathbf{P}\{d(X_n, X) > \varepsilon\} < \delta$$

□

1.3 Indipendenza

Se abbiamo $X_1, ..., X_m$ variabili aleatorie a valori rispettivamente in $(E_1, \mathcal{E}_\infty), ..., (E_m, \mathcal{E}_\Updownarrow)$, esse si dicono **indipendenti** se:

$$\mathbf{P}\{X_1 \in A_1, ..., X_m \in A_m\} = \prod_{i=1} m\mathbf{P}\{X_i \in A_i\} \ \forall A_1 \in \mathcal{E}_1, ..., A_m \in \mathcal{E}_m$$

Analogamente gli eventi $A_1, ..., A_m \in \mathcal{F}$ si dicono **indipendenti** se lo sono le loro funzioni indicatrici $\mathbf{1}_{A_1}, ..., \mathbf{1}_{A_m}$. Inoltre, se $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_m$ sono sottotribú di $\mathcal{F}$, allora esse si dicono **indipendenti** se, per ogni $A_1 \in \mathcal{F}_1, ..., A_m \in \mathcal{F}_m$, gli eventi $A_1, ..., A_m$ sono indipendenti. É chiaro che $X_1, ..., X_m$ sono indipendenti se e solo se lo sono $\sigma(X_1), ..., \sigma(X_m)$.

Proposizione 1.3 *se X e Y sono variabili aleatorie integrabili e indipendenti, allora anche XY é integrabile e:*

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

□

1.4 Teorema delle classi monotone

Ricordiamo il seguente risultato, noto come **teorema delle classi monotone**, che risulterá di frequente uso (anche se non sempre dichiarato) nel resto della trattazione che faremo.

Teorema 1.4 *se E é un insieme, $\mathcal{C}$ una classe di parti di E stabile per intersezione finita, e $\mathcal{H}$ uno spazio vettoriale di funzioni limitate reali su E tale che:*

1) se $\{f_n\}_n$ é una successione crescente di elementi di $\mathcal{H}$, tutti maggiorati da uno stesso elemento di $\mathcal{H}$, allora $\sup_n f_n \in \mathcal{H}$.

2) $\mathcal{H}$ contiene la funzione 1 e le indicatrici degli elementi di $\mathcal{C}$

allora $\mathcal{H}$ contiene tutte le funzioni $\sigma(\mathcal{C})$-misurabili e limitate.

□

1.5 Teorema di Radon - Nikodym

Una misura μ si dice **assolutamente continua** rispetto ad un'altra misura ν se $\nu(A) = 0$ implica $\mu(A) = 0$. Due misure si dicono **equivalenti** se ognuna delle due é assolutamente continua rispetto all'altra.

Ricordiamo che vale il seguente teorema, noto come **teorema di Radon - Nikodym**

Teorema 1.5 *se μ, ν sono misure su $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$, allora μ é assolutamente continua rispetto a ν se e solo se esiste una funzione misurabile $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, chiamata* **densitá di μ rispetto a ν**) *tale che*

$$\mu(A) = \int_A f(x)\ d\nu(x)\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$$

Questa relazione é anche scritta piú brevemente $d\mu = f.d\nu$.

□

1.6 Leggi normali sulla retta

Ricordiamo che una variabile aleatoria reale X si dice **gaussiana** o **normale** di media m e varianza σ^2, se la sua legge ha come densitá (rispetto alla misura di Lebesgue) la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma}\right)$$

La sua legge $X(\mathbf{P})$ si dice **legge gaussiana** o **legge normale** e si indica piú brevemente con $N(m, \sigma^2)$.

Ricordiamo che, se X ha legge normale $N(m_1, \sigma_1^2)$, Y ha legge normale $N(m_2, \sigma_2^2)$, e X e Y sono indipendenti, allora $X + Y$ é normale di legge $N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

1.7 Variabili aleatorie in spazi di Hilbert

Se abbiamo lo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ e lo spazio di Hilbert $(H, \mathcal{H})$, possiamo definire le seguenti classi di variabili aleatorie:

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; H) = \left\{X : \Omega \to H \text{ misurabile} \;\middle|\; \int_\Omega \|X\|_H^p\ d\mathbf{P} < +\infty\right\}$$

Se $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; H)$, posso definire la **speranza** di X $E[X]$ come l'unico elemento di H tale che:

$$\forall x \in H, < E[X], x >= E[< X, x >_H]$$

Se $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; H)$, posso definire la **covarianza** di X e Y $(Cov(X, Y))$ come l'unico elemento di $(H^2)^*$ tale che:

$$\forall x, y \in H, (Cov(X, Y))(x, y) = E[< X, x >_H < Y, y >_H]$$

La covarianza si puó anche rappresentare mediante un operatore lineare continuo $Q : H \to H$ tale che:

$$< Qx, y >_H = Cov(X, Y)$$

Se $H = \mathbf{R}^n$, allora la speranza é quella definita nel modo usuale, (cioé $E[X] = (E[X_1], ..., E[X_n])$) e la covarianza di due variabili aleatorie viene ad essere la loro matrice delle covarianze: $(Cov(X, Y))_{ij} = Cov(X_i, Y_j)$.

1.8 Speranza condizionale

Se $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, e $\mathcal{G}$ é una tribú contenuta in $\mathcal{F}$, chiamo **speranza condizionale** di X rispetto a $\mathcal{G}$ l'unica variabile aleatoria $E[X|\mathcal{G}]$ tale che:

$$\int_B E[X|\mathcal{G}]\ d\mathbf{P} = \int_B X\ d\mathbf{P}\ \forall B \in \mathcal{G}$$

Ricordiamo le seguenti proprietá della speranza condizionale: se $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, allora:

1) $E[aX + bY|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + bE[X|\mathcal{G}]\ \forall a, b \in \mathbf{R}$
2) se $X \geq 0$ q.c., allora anche $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$ q.c.
3) $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$
4) se $\mathcal{H}$ é una sottotribú di $\mathcal{G}$, allora $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}]$
5) se Z é una variabile aleatoria $\mathcal{G}$-misurabile e limitata, allora $E[ZX|\mathcal{G}] = ZE[X|\mathcal{G}]$
6) se X é indipendente da $\mathcal{G}$, allora $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$.

Capitolo 2

Processi stocastici

2.1 Definizioni e proprietá

Se abbiamo uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, e una famiglia di variabili aleatorie $(X_t)_{t\in T}$ a valori in uno spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$, e con $T \subseteq \mathbf{R}$, diciamo che la famiglia $(X_t)_{t\in T}$ é un **processo stocastico** (o piú semplicemente un **processo**) a valori in $(E, \mathcal{E})$, che viene chiamato **spazio degli stati**, e chiamiamo l'insieme T **insieme dei tempi**). Usualmente T é o un insieme discreto (di solito $\mathbf{N}$ o $\mathbf{Z}$), e si parla allora di processo **a tempi discreti**, o un intervallo chiuso della retta reale, e si parla di processo **a tempi continui**.

Se ci mettiamo nel caso particolare in cui $(E, \mathcal{E}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ (rispettivamente $(E, \mathcal{E}) = (\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$, allora $(X_t)_{t\in T}$ si dice **processo reale** (rispettivamente **processo reale** n-**dimensionale**).

Se scegliamo $\omega \in \Omega$, allora l'applicazione $T \ni t \to X_t(\omega) \in E$ é chiamata **traiettoria** di ω.

Se abbiamo il processo $(X_t)_{t\in T}$ a valori in $(E, \mathcal{E})$, possiamo costruire lo spazio $(E^T, \mathcal{E}^{\otimes T})$ e l'applicazione misurabile $\pi : \Omega \to E^T$, tale che $\pi(\omega) = (X_t(\omega))_{t\in T}$. La misura $\pi(\mathbf{P})$ su E, immagine di $\mathbf{P}$ mediante π, si chiama **legge del processo**. Allora, se conosciamo la legge di un processo, conosciamo in particolare le sue distribuzioni finite, cioé le distribuzioni:

$$\mu_\pi(A_1 \times ... \times A_k) = \mathbf{P}\{X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_k} \in A_k\}$$

dove $A_1, ..., A_k \in \mathcal{E}$, e abbiamo chiamato $\Pi = \{\pi = (t_1, ..., t_n) \mid n \geq 1, t_i \in T\}$ l'insieme delle possibili n-uple di coordinate in $[0, T]$.

A volte si presenta il problema inverso; si ha cioé una famiglia di leggi di dimensione finita $(\mu_\pi)_{\pi\in\Pi}$ su $(E, \mathcal{E})$, e si vuole costruire un processo $(X_t)_t$ avente come famiglia di distribuzioni finite proprio $(\mu_\pi)_{\pi\in\Pi}$. La soluzione standard a questo problema é data dal seguente teorema, dovuto a Kolmogorov.

Teorema 2.1 *: se E é uno spazio metrico σ-compatto, e poniamo $\Omega = E^T$, $X_t(\omega) = \omega(t)$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s, s \leq t, s \in T\}$, $\mathcal{F} = \sigma\{X_t, t \in T\}$, $\Pi = \{\pi = (t_1, ..., t_n) \mid n \geq 1, t_i \in T\}$ e $(\mu_\pi)_{\pi\in\Pi}$ é un sistema di distribuzioni di dimensione finita su $(E, \mathcal{B}(E))$ tale che:*

- $\mu_{(t_1,...,t_n)}$ *é una distribuzione su* $E_{t_1} \times ... \times E_{t_n} = E^\pi$.

- *le* $(\mu_\pi)_{\pi\in\Pi}$ *soddisfano la seguente* **condizione di consistenza**: *se* $\pi' \subseteq \pi \in \Pi$, *e definiamo* $P_{\pi,\pi'} : E^\pi \to E^{\pi'}$ *come la proiezione naturale, allora abbiamo che:* $P_{\pi,\pi'}(\mu_\pi) = \mu_{\pi'}$.

allora esiste una unica legge di probabilitá $\mathbf{P}$ *su* $(\Omega, \mathcal{F})$ *tale che le* μ_π *sono le distribuzioni di dimensione finita del processo* $(X_t)_t$.

□

Il processo $(X_t)_{t\in T}$ si dice **stazionario** se $\forall t_1, ..., t_k \in T, A_1, ..., A_k \in \mathcal{E}$ si ha che:

$$\mathbf{P}\{X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_k} \in A_k\} = \mathbf{P}\{X_{t_1+h} \in A_1, ..., X_{t_k+h} \in A_k\}$$

$\forall h$ tale che $t_1 + h, ..., t_k + h \in T$. In particolare, se un processo é stazionario, allora tutte le X_t hanno la stessa legge.

Diciamo che il processo $(Y_t)_{t\in T}$ é una **versione** del processo $(X_t)_{t\in T}$ se i due processi sono a valori sullo stesso spazio degli stati e $\forall t \in T, X_t = Y_t$ $\mathbf{P}$-q.c.. Due processi si dicono **indistinguibili** se sono a valori sullo stesso spazio degli stati e $\mathbf{P}\{X_t = Y_t \ \forall t \in T\} = 1$. Allora due processi indistinguibili sono una versione l'uno dell'altro, ma non vale il viceversa.

Introduciamo ora il concetto di processo adattato. Diciamo che una famiglia di tribú $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ é una **filtrazione** se $\mathcal{F}_t \in \mathcal{F}$ $\forall t \in T$ e $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ $\forall s < t \in T$. Allora il processo $(X_t)_{t\in T}$ si dice **adattato** alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, se ogni X_t é $\mathcal{F}_t$-misurabile.

Se costruiamo la filtrazione $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \le t)$, allora $(X_t)_{t\in T}$ é adattato a $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, che si chiama **filtrazione naturale** del processo $(X_t)_{t\in T}$.

Supponiamo, d'ora in poi, che T sia un intervallo di retta reale. Per ogni $t \in T$ per cui esiste un intorno destro in T, costruiamo $\mathcal{F}_{t^+} = \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon}$; chiaramente $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t^+}$; diciamo che la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$ é **continua a destra** se $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$ $\forall t \in T$ per cui esiste un intorno destro in T.

Una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ si dice **standard** se:
1) é continua a destra
2) $\forall t$, $\mathcal{F}_t$ contiene tutti gli eventi trascurabili di $\mathcal{F}$.

Un processo si dice **standard** se é adattato ad una filtrazione standard.

D'ora in poi, se non vi saranno pericoli di confusione, indicheremo il processo $(X_t)_{t\in T}$ piú semplicemente con $(X_t)_t$, o addirittura con X.

D'ora in poi supponiamo che E sia uno spazio vettoriale metrico, e che $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$. Un processo a valori in $(E, \mathcal{B}(E))$ si dice **continuo** (rispettivamente **quasi certamente continuo**) se $\forall \omega \in \Omega$ (risp. per quasi ogni $\omega \in \Omega$), l'applicazione $t \to X_t(\omega)$ é continua. Si puó dare una analoga definizione per i processi **continui a destra** o **continui a sinistra**.

Un processo $(X_t)_t$ si dice **misurabile** se l'applicazione $(t,\omega) \to X_t(\omega)$ é misurabile da $(T \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{F})$ in $(E, \mathcal{B}(E))$.

Un processo $(X_t)_t$ si dice **progressivamente misurabile** se $\forall u \in [0,T]$ l'applicazione:

$$([0,u] \times \Omega, \mathcal{B}([0,u]) \times \mathcal{F}_u) \ni (t,\omega) \to X_t(\omega) \in (E, \mathcal{B}(E))$$

é misurabile. É evidente che un processo progressivamente misurabile é misurabile.

Proposizione 2.2 *: se $(X_t)_t$ é continuo da destra o da sinistra, allora é progressivamente misurabile.*

Per una dimostrazione vedere Baldi[1], pagg. 25 - 26.

□

D'ora in poi supponiamo che $(E, \mathcal{B}(E)) = (\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))$. Introduciamo ora un utile criterio per stabilire se un processo é continuo; questo criterio é chiamato **test di Kolmogorov**

Teorema 2.3 *: se T é un aperto di $\mathbf{R}$, e $(X_t)_{t\in T}$ é un processo n-dimensionale standard tale che $\exists \alpha > 0, \beta > 0, c > 0$ tali che:*

$$E[\|X_y - X_z\|^\beta] \leq c|y-z|^{1+\alpha}$$

allora esiste un processo $(Y_t)_{t\in T}$ indistinguibile da $(X_t)_{t\in T}$ a traiettorie hölderiane di esponente γ $\forall \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$ su ogni compatto di T.

Per una dimostrazione vedere Baldi[1], pagg. 26 - 28.

□

2.2 Processi gaussiani

Rivolgiamo ora la nostra attenzione ad una classe particolare di processi. Un processo $(X_t)_{t\in T}$ a valori su uno spazio di Hilbert $(H, \mathcal{B}(H))$ si dice **gaussiano** se $\forall t_1, ..., t_n \in T, \forall \phi \in (H^n)^*$, la variabile aleatoria reale $\phi(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ é gaussiana. Se $(H, \mathcal{B}(H)) = (\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$, ció significa semplicemente che $\forall t_1, ..., t_n \in T, \forall \phi \in (\mathbf{R}^d)^n$ la variabile aleatoria reale $\sum_i < X_{t_i}, \phi_i >_{\mathbf{R}^d}$ é gaussiana.

Se il processo $(X_t)_{t\in T}$ é gaussiano, si chiama **media** del processo $(X_t)_{t\in T}$ la funzione $m_X : T \to E$:

$$m_X(t) = E[X_t]$$

e **funzione delle covarianza**, o piú semplicemente **covarianza** del processo la funzione $k_X : T^2 \to E$:

$$k_X(s,t) = Cov(X_s, X_t)$$

Citiamo ora un risultato classico che ci permette di identificare la legge di un processo gaussiano con la sua media e covarianza:

Teorema 2.4 *: se due processi reali d-dimensionali $(X_t)_t$ e $(Y_t)_t$ sono gaussiani con media $m_X = m_Y$ e covarianza $Cov(X_s, X_t) = Cov(Y_s, Y_t)$, allora $X(\mathbf{P}) = Y(\mathbf{P})$.*

Dimostrazione: la legge di un processo é univocamente determinata dalle sue distribuzioni parziali che, nel caso di processi gaussiani, sono univocamente determinate dalla media e dalla covarianza; allora, se X e Y hanno la stessa media e la stessa covarianza e sono gaussiani, allora hanno anche la stessa legge.

$\square$

2.3 Tempi di arresto

La variabile aleatoria $\tau : \Omega \to [0,T]$ si dice **tempo di arresto** per la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$ se $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \; \forall t \in [0,T]$. Se chiamiamo $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t, t \in T)$, allora possiamo definire la σ-algebra del tempo di arresto τ in questo modo:

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \; \forall t \in T\}$$

Notiamo che se ρ e τ sono tempi di arresto per la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$, anche $\rho \wedge \tau$ e $\rho \vee \tau$ lo sono, e se $\rho \leq \tau$, allora $\mathcal{F}_\rho \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

Vediamo subito un esempio di tempo di arresto.

Lemma 2.5 *: se $(X_t)_t$ é un processo continuo, a valori in $\mathbf{R}^n$ e adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$, e definiamo la variabile aleatoria:*

$$\tau = \inf\{0 \leq s \leq T | X_s \in B\}, \text{ dove } B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$$

allora τ é un tempo di arresto rispetto a $(\mathcal{F}_t)_t$.

Dimostrazione: bisogna dimostrare che $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \; \forall t \in [0,T]$; notiamo che:

$$\{\tau > t\} = \cap_{0 \leq s \leq t}\{X_s \in B^c\} = \cap_{0 \leq s \leq t, s \in \mathbf{Q}}\{X_s \in B^c\}$$

l'ultima uguaglianza sussiste poiché il processo é continuo. Notiamo che gli eventi all'ultimo membro sono una quantitá numerabile ed appartengono tutti a $\mathcal{F}_t$, per cui $\{\tau > t\} \in \mathcal{F}_t$, e τ é un tempo di arresto.

$\square$

2.4 Martingale

Un processo stocastico $(X_t)_{t\in T}$, adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ e tale che $X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})\ \forall t$ si dice:

- una **martingala** se $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s\ \forall s \leq t$
- una **supermartingala** se $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s\ \forall s \leq t$
- una **sottomartingala** se $E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s\ \forall s \leq t$

É chiaro che una combinazione lineare di due martingale é ancora una martingala, e una combinazione lineare a coefficienti positivi di due supermartingale (risp. sottomartingale) é una supermartingala (sottomartingala); infine, se X é una supermartingala, allora $-X$ é una sottomartingala, e viceversa.

Teorema 2.6 *se $(M_t)_t$ é una $(\mathcal{F}_t)_t$-martingala continua a destra, e τ_1, τ_2 sono due tempi di arresto tali che τ_2 é limitato e $\tau_1 \leq \tau_2$, allora:*

$$E[M_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}] = M_{\tau_1}$$

Per una dimostrazione vedere Baldi[1], pagg. 92 - 93

Corollario 2.7 *se $(M_t)_t$ é una $(\mathcal{F}_t)_t$-martingala continua a destra, e τ é un tempo d'arresto, allora $(M_{t\wedge\tau})_t$ é una $(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})_t$-martingala.*

□

Una martingala si dice **limitata** in $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ se:

$$\sup_{t\in T} E[|X_t|^p] < +\infty$$

Citiamo ora il seguente risultato, noto come **disuguaglianza di Doob**:

Teorema 2.8 *: se $(X_t)_t$ é una martingala continua a destra (o continua a sinistra) limitata in L^p, allora:*

$$\| \sup_t |X_t| \|_{L^p}^p \leq q \sup_t \|X_t\|^p$$

dove q é l'esponente coniugato di p, cioé il numero reale tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Per una dimostrazione vedere Baldi[1], pagg. 86 - 87.

□

2.5 Martingale locali

Un processo $(M_t)_t$, adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$, é una **martingala locale** se esiste una successione $(\tau_n)_n$ di tempi di arresto tali che:

- $\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty$ q.c.

- $(M_{\tau_n \wedge t})_t$ é una martingala limitata $\forall\ n$

se succede questo, dico che la successione $(\tau_n)_n$ **riduce** la martingala locale $(M_t)_t$.

Notiamo subito che una martingala continua é una martingala locale; basta infatti porre:

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\{t : |M_t| \geq n\} & \\ +\infty & \text{se } |M_t| > n \ \forall t \end{cases}$$

allora $(M_{\tau_n \wedge t})_t$ é una martingala e $|M_{\tau_n \wedge t}| \leq n\ \forall t$.

Lemma 2.9 *: se $(M_t)_t$ é una martingala locale positiva, allora é una supermartingala.*

Dimostrazione: prendiamo la successione $(\tau_n)_n$ che riduce $(M_t)_t$; allora, applicando il lemma di Fatou e la proprietá di martingala ho:

$$E[M_t] \leq \liminf_{n\to\infty} E[M_{\tau_n \wedge t}] = \liminf_{n\to\infty} E[M_0] = E[M_0]$$

allora $(M_t)_t \in L^1\ \forall t$.
La condizione di supermartingala é equivalente alla seguente:

$$\forall A \in \mathcal{F}_s : E[(M_t - M_s)\mathbf{1}_A] \leq 0$$

Poiché $\{\tau_n \leq s\} \in \mathcal{F}_s$ abbiamo:

$$E[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_n > s\}}(M_{t\wedge\tau_n} - M_s)] = E[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_n > s\}}(M_{t\wedge\tau_n} - (M_{s\wedge\tau_n})] = 0$$

allora, siccome $\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_n>s\}}(M_{t\wedge\tau_n} - M_s) \geq -M_s$, possiamo applicare il lemma di Fatou:

$$0 \geq \limsup_{n\to\infty} E[\mathbf{1}_{A\cap\{\tau_n>s\}}(M_{t\wedge\tau_n} - M_s)] = E[\mathbf{1}_{A\cap\Omega}(M_t - M_s)]$$

e abbiamo la tesi.

□

2.6 Il moto browniano

Vediamo ora un processo che é contemporaneamente un esempio di processo gaussiano reale ed una martingala.

Diciamo che il processo $(W_t)_{t\geq 0}$ adattato a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq)}$ é un **moto browniano** se:

- $W_0 = 0$ $\mathbf{P}$-q.c.

- se $s < t$, $W_t - W_s$ é indipendente da $\mathcal{F}_s$

- se $s < t$, $W_t - W_s$ ha legge $N(0, t-s)$

Lemma 2.10 *: il processo $(W_t)_t$ é una martingala ed é gaussiano con media $E[W_t] = 0$ $\forall t \geq 0$ e covarianza $Cov(W_s, W_t) = s$ $\forall 0 \leq s \leq t$.*

Dimostrazione: siccome $W_t - W_s$ é indipendente da $\mathcal{F}_s$ $\forall s < t$ ed ha legge $N(0, t-s)$, allora $E[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] = 0$, e quindi $(W_t)_t$ é una martingala; inoltre, $\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{R}$, $\forall t_1, ..., t_n \geq 0$, abbiamo che $\sum_i \lambda_i W_{t_i}$ é una variabile aleatoria gaussiana. Dimostriamo questo per induzione. Per $n = 1$ é banale, poiché $W_{t_1} = W_{t_1} - 0 = W_{t_1} - W_0$, che ha legge $N(0, t_1)$. Supponiamo ora che ogni combinazione lineare della forma $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i W_{t_i}$ sia una variabile aleatoria gaussiana; allora:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i W_{t_i} = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i W_{t_i} + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) W_{t_{n-1}} + \lambda_n (W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$$

L'ultimo addendo é gaussiano e indipendente da $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$, e la variabile aleatoria $\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i W_{t_i} + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) W_{t_{n-1}}$ é $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$-misurabile e normale; allora la somma delle due variabili aleatorie é una variabile aleatoria normale.

Calcoliamo ora la legge del processo: innanzitutto $E[W_t] = 0$ $\forall t \geq 0$; inoltre, se $s < t$, poiché $W_t - W_s$ é indipendente da W_s, abbiamo:

$$Cov(W_s, W_t) = Cov(W_s, W_t - W_s) + Var[W_s] = 0 + s = s$$

Rimangono cosí determinate media e covarianza del processo; siccome questo é gaussiano, da queste due quantitá si ricava la legge.

$\square$

Lemma 2.11 *: se $(W_t)_t$ é un moto browniano, allora esiste sempre una sua versione hölderiana con esponente $\gamma < \frac{1}{2}$.*

Dimostrazione: per dimostrare la tesi, basta applicare il test di Kolmogorov al processo; prendiamo quindi $s < t$ e calcoliamo:

$$\begin{aligned} E[|W_t - W_s|^{2n}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbf{R}} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} \, dx = \\ &= (t-s)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} y^{2n} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy = c_n |t-s|^n \end{aligned}$$

dove abbiamo chiamato $c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} y^{2n} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy$, che é una costante reale. Allora esiste una versione di $(W_t)_t$ a traiettorie hölderiane di esponente minore di $\frac{n-1}{2n}$; siccome $\forall \gamma < \frac{1}{2}$ possiamo trovare un n tale che $\gamma < \frac{n-1}{2n}$, abbiamo la tesi.

□

2.7 Costruzione di un moto browniano

Un moto browniano si puó costruire in diversi modi; il metodo standard é costruire una misura sullo spazio $\mathbf{R}^{[0,T]}$ dotato della tribú prodotto, e di costruire il moto browniano tramite le proiezioni di questo spazio sull'insieme dei tempi. La particolare misura che si ottiene é chiamata **misura di Wiener**; poiché abbiamo visto che il moto browniano ha traiettorie q.c. hölderiane di esponente minore di $\frac{1}{2}$, in particolare ha traiettorie continue, per cui la misura di Wiener sará concentrata sullo spazio:

$$C_0([0,T]) = \{f : [0,T] \to \mathbf{R} \mid f \text{ continua e } f(0) = 0\}$$

Notiamo inoltre che la proiezione della tribú prodotto di $\mathbf{R}^{[0,T]}$ su $C_0([0,T])$ coincide con la sua tribú boreliana. Infatti, ogni insieme della forma $B(f,\varepsilon) = \{g \in C_0([0,T]) \mid \|f - g\|_C < \varepsilon\}$ é ottenibile nella tribú prodotto in questo modo:

$$\{g \in C_0([0,T]) \mid |f(r) - g(r)| < \varepsilon \ \forall r \in \mathbf{Q} \cap [0,T]\}$$

Poiché le palle aperte generano la tribú boreliana di $C_0([0,T])$, allora questa é inclusa nella tribú prodotto di $\mathbf{R}^{[0,T]}$. Viceversa, ogni insieme G della forma:

$$G = \{g \in C_0([0,T]) \mid |c - g(r)| < \varepsilon \}$$

per qualche $r \in [0,T]$, é esprimibile mediante l'unione $\cup_{f(r)=c} B(f,\varepsilon)$; siccome gli insiemi della forma di G formano una base della traccia su $C_0([0,T])$ della tribú prodotto di $\mathbf{R}^{[0,T]}$, allora questa é inclusa nella tribú boreliana di $C_0([0,T])$.

Diamo ora un modo per costruire la misura di Wiener, che fa uso del teorema di estensione di Kolmogorov. Per fare uso del teorema, descriviamo intanto le distribuzioni di dimensione finita; abbiamo visto che un moto browniano é un processo gaussiano; allora $(W_{t_1}, ..., W_{t_n})$ ha media 0 e covarianza:

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & ... & ... & t_1 \\ . & t_2 & ... & t_2 \\ . & . & & . \\ t_1 & ... & ... & t_n \end{pmatrix}$$

La condizione di coerenza segue subito dal fatto che la legge del vettore $(W_{t_{i_1}}, ..., W_{t_{i_n}})$ é una legge normale avente come media 0 e come covarianza il minore della matrice A costituito dalle righe e dalle colonne di indici $i_1, ..., i_n$. Allora posso applicare il teorema di estensione di Kolmogorov, e trovare un'unica misura di probabilitá $\mathbf{P}$ sullo spazio $\Omega = \mathbf{R}^{[0,T]}$, dotato della tribú $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbf{R})^{\otimes[0,T]}$, che sia la legge del processo.

2.8 Moto browniano $k-$dimensionale

Ora che abbiamo costruito un moto browniano unidimensionale, possiamo costruire agevolmente un moto browniano $k-$dimensionale.

Diciamo che il processo $(W(t))_t$, adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$ e a valori in $\mathbf{R}^k$ é un **moto browniano $k-$dimensionale** se ogni componente $(W_i(t))_t$ é un moto browniano unidimensionale, indipendente dalle altre componenti. Si nota subito che un moto browniano $k-$dimensionale gode delle tre proprietá seguenti:

- $W(0) = 0$ $\mathbf{P}-$q.c.

- se $s < t$, allora $W(t) - W(s)$ é indipendente da $\mathcal{F}_s$

- se $s < t$, allora $W(t) - W(s)$ ha legge $N(0, (t-s)I)$, dove I é la matrice identitá $k-$dimensionale

Lemma 2.12 : *il processo $(W_t)_t$ é una martingala ed é gaussiano con media $E[W_t] = 0$ $\forall t \geq 0$ e covarianza $Cov(W_s, W_t) = sI$ $\forall 0 \leq s \leq t$, dove I é la matrice identitá $k-$dimensionale.*

Lemma 2.13 : *se $(W_t)_t$ é un moto browniano, allora esiste sempre una sua versione hölderiana con esponente $\gamma < \frac{1}{2}$.*

Le dimostrazioni dei due lemmi sono analoghe a quelle per il moto browniano unidimensionale.

Capitolo 3

Integrale stocastico rispetto ad un moto browniano

3.1 Preliminari

Dato un moto browniano standard $(W_t)_t$, e un numero reale $p \geq 1$, definiamo le seguenti classi di processi. La prima é questa:

$$\Lambda_W^p([0,T]) = \left\{ (X_t)_t \middle| X \quad \text{progr. mis. e t.c. } \mathbf{P}\left\{ \int_0^T |X_s|^p \ ds < +\infty \right\} = 1 \right\}$$

La condizione nella definizione equivale a dire che un elemento di $\Lambda_W^p([0,T])$ ha traiettorie $\mathbf{P}$-q.c. appartenenti a $L^p([0,T],dx)$. Definiamo ora:

$$M_W^p([0,T]) = \left\{ (X_t)_t \middle| X \in \Lambda_W^p \text{ e } E\left[\int_0^T |X_s|^p \ ds \right] < +\infty \right\}$$

D'ora in poi, se non ci sará pericolo di confusione, queste due classi potranno venire indicate con Λ^p e M^p.

Innanzitutto notiamo che $M_W^p([0,T]) \subseteq \Lambda_W^p([0,T])$. Notiamo inoltre che, se definiamo la norma:

$$\|X\|_{M^p} = E\left[\int_0^T |X_s|^p \ ds \right] = \int_{\Omega \times [0,T]} |X_s|^p \ ds \ d\mathbf{P}$$

allora $M_W^p([0,T])$ é uno spazio di Banach contenuto in $L^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,T]), dx \otimes d\mathbf{P})$ secondo questa norma. Chiaramente $M_W^2([0,T])$ verrá ad essere uno spazio di Hilbert secondo il prodotto scalare:

$$< X, Y >_{M^2} = E\left[\int_0^T X_s . Y_s \ ds \right] = \int_{\Omega \times [0,T]} X_s . Y_s \ ds \ d\mathbf{P}$$

Gli elementi di queste due classi di processi possono essere approssimati mediante processi continui. In particolare vale il seguente

Lemma 3.1 *: 1)* $\forall (X_t)_t \in \Lambda^2 \ \exists \{(Y_t^{(n)})_t\}_n$ *successione di processi continui e adattati tali che:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |X_t - Y_t^{(n)}|^2 \ dt = 0$$

2) $\forall (X_t)_t \in M^2 \exists \ \{(Z_t^{(n)})_t\}_n$ *successione di processi continui ed appartenenti ad* M^2 *tali che:*

$$\lim_{n\to\infty} \|X_t - Z_t\|_{M^2} = 0$$

Dimostrazione: 1) definiamo:

$$\rho(t) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{se } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |t| > 1 \end{cases}$$

siccome $e^{-\frac{1}{1-t^2}} \in L^1([-1,1], dx)$, possiamo trovare c tale che $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) \ dt = \int_{-1}^{1} \rho(t) \ dt = 1$; poniamo allora $X_t = 0 \forall t > T$ e definiamo il processo:

$$\begin{aligned} (J_\varepsilon X)_t &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} \rho\left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon}\right) X_s \ ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-2\varepsilon}^{t} \rho\left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon}\right) X_s \ ds = \\ &= \int_{-1}^{1} \rho(v) X_{t-\varepsilon v-\varepsilon} \ dv \end{aligned}$$

allora $((J_\varepsilon X)_t)_t$ é adattato a $(\mathcal{F}_t)_t$ e, siccome $(X_t)_t$ ha traiettorie in L^2, quindi integrabili, $((J_\varepsilon X)_t)_t$ ha traiettorie continue, cioé é continuo. Mostriamo ora che $((J_\varepsilon X)_t)_t \in \Lambda^2$:

$$\begin{aligned} \int_0^T |(J_\varepsilon X)_t|^2 \ dt &= \int_0^T \left| \int_{-1}^{1} \rho(v)^{\frac{1}{2}} \rho(v)^{\frac{1}{2}} X_{t-\varepsilon v-\varepsilon} \ dv \right|^2 \ dt \leq \\ &\leq \int_0^T \left(\int_{-1}^{1} \rho(v) \ dv\right) \left(\int_{-1}^{1} \rho(v) X_{t-\varepsilon v-\varepsilon}^2 \ dv\right) \ dt = \\ &= \int_{-1}^{1} \rho(v) \left(\int_0^T X_{t-\varepsilon v-\varepsilon}^2 \ dt\right) \ dv \leq \\ &\leq \int_0^T X_t^2 \ dt \end{aligned}$$

Mostriamo ora che $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T |(J_\varepsilon X)_t - X_t|^2 \ dt = 0$ q.c.. Se il processo $(X_t)_t$ é della forma $X_t = \mathbf{1}_\Omega.\psi(t)$, con $\psi \in C^0([0,T])$, abbiamo:

$$\int_0^T |(J_\varepsilon \psi(t) \quad - \quad \psi(t)|^2 \ dt = \int_0^T \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-2\varepsilon}^{t} \rho\left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon}\right) \psi(s) \ ds - \psi(t) \right|^2 \ dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-2\varepsilon}^t \rho\left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon}\right) \psi(s)\, ds - \right.\\
&\quad \left. - \int_0^T \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-2\varepsilon}^t \rho\left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon}\right) \psi(t)\, ds \right|^2 dt \leq \\
&\leq \int_0^T \int_{t-2\varepsilon}^t \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{t-s-\varepsilon}{\varepsilon}\right) |\psi(t)-\psi(s)|^2\, ds\, dt \leq \\
&\leq T. \sup_{|s-t|<2\varepsilon} |\psi(t)-\psi(s)|^2 \to 0
\end{aligned}
$$

prendiamo allora ω tale che $X_{.}(\omega) \in L^2([0,T],dx)$, e prendiamo $\psi_\delta \in C^0([0,T])$ tale che $\|X_{.}(\omega)-\psi_\delta\|_{L^2} < \delta$; allora:

$$
\begin{aligned}
\|(J_\varepsilon X)_t(\omega) &- X_t(\omega)\|_{L^2} = \|(J_\varepsilon X)_t(\omega) - (J_\varepsilon \psi_\delta)_t(\omega) + (J_\varepsilon \psi_\delta)_t(\omega) - \\
&\quad - \psi_\delta(t)(\omega)\psi_\delta(t)(\omega) - X_t(\omega)\|_{L^2} \leq \\
&\leq \|(J_\varepsilon(X_t - \psi_\delta(t))(\omega)\|_{L^2} + \|(J_\varepsilon\psi_\delta)_t(\omega) - \\
&\quad - \psi_\delta(t)(\omega)\|_{L^2} + \|\psi_\delta(t)(\omega) - X_t(\omega)\|_{L^2} \leq \\
&\leq 2\|\psi_\delta(t)(\omega) - X_t(\omega)\|_{L^2} + \|(J_\varepsilon\psi_\delta)_t(\omega) - \psi_\delta(t)(\omega)\|_{L^2} \leq \\
&\leq \|(J_\varepsilon\psi_\delta)_t(\omega) - \psi_\delta(t)(\omega)\|_{L^2} + 2\delta
\end{aligned}
$$

ma, per quanto visto prima, $\|(J_\varepsilon\psi_\delta)_t(\omega) - \psi_\delta(t)(\omega)\|_{L^2}$ puó essere reso piccolo a piacere. Allora il processo dato da $Y_t^{(n)} = (J_{\frac{1}{n}} X)_t$ verifica la tesi.

2) definiamo la funzione:

$$
\phi_N(x) = \begin{cases} x & \text{se } |x| \leq N \\ \frac{Nx}{|x|} & \text{se } |x| > N \end{cases}
$$

allora ϕ_N é lipschitziana con costante di Lipschitz 1. Se prendiamo la successione $\{(Y_t^{(n)})_t\}_n$ di processi continui del punto (1), allora $(\phi_N(Y_t^{(n)}))_t$ e $(\phi_N(X_t))_t$ sono progressivamente misurabili e:

$$
\int_0^T |\phi_N(X_t) - \phi_N(Y_t^{(n)})|^2\, dt \leq \int_0^T |X_t - Y_t^{(n)}|^2\, dt \longrightarrow^{n\to\infty} 0
$$

siccome

$$
\int_0^T |\phi_N(X_t) - \phi_N(Y_t^{(n)})|^2\, dt \leq \int_0^T (2N)^2 dt = 4N^2 T
$$

allora $(\phi_N(X_t))_t, (\phi_N(Y_t^{(n)}))_t \in M^2$ e, , per il teorema di Lebesgue:

$$
\lim_{n\to\infty} \|\phi_N(X_t) - \phi_N(Y_t^{(n)})\|_{M^2} = 0
$$

Siccome:

$$\|\phi_N(X_t) - X_t\|_{M^2} \leq \|\mathbf{1}_{\{|X_t>N\}} X_t\|_{M^2} \longrightarrow^{n\to\infty} 0$$

allora $\forall k \ \exists N, n$ tali che $\|X_t - \phi_N(Y_t^{(n)})\|_{M^2} < \frac{1}{k}$; prendiamo allora $Z_t^{(k)} = \phi_N(Y_t^{(n)})$ e abbiamo la tesi.

□

Si dice **processo elementare** un processo della forma:

$$X_t = \sum X_i.\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t)$$

dove X_{t_i} é $\mathcal{F}_{t_i}$-misurabile. Anche i processi elementari godono di interessanti caratteristiche di densitá. In particolare vale il

Lemma 3.2 *: 1) $\forall (X_t)_t \in \Lambda^2$ esiste una successione di processi elementari $\{(X_t^n)_t\}_n \subset \Lambda^2$ tali che:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |X_t - X_t^n|^2 \ dt = 0\mathbf{P}-\text{q.c.}$$

2) $\forall (X_t)_t \in M^2$ esiste una successione di processi elementari $\{(X_t^n)_t\}_n \subset M^2$ tali che:

$$\lim_{n\to\infty} |X_t - X_t^n|_{M^2} = 0$$

Per una dimostrazione vedere Baldi[1] pagg.128 - 132.

□

Possiamo allora definire una isometria a partire dall'insieme dei processi elementari in questo modo:

$I : M_W^2 \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

tale che

$I(X.\mathbf{1}_{[a,b)}) = X(W_b - W_a)$

ed estenderla poi per densitá. Chiamiamo allora questa isometria **integrale stocastico** e la scriviamo cosí:

$$I(X) = \int_0^T X_t \ dW_t$$

L'integrale stocastico gode delle seguenti proprietá:

1) $E[I(X)] = E\left[\int_0^T X_t \, dW_t\right] = 0$

Dimostrazione: per un processo elementare si ha che:

$$E[I(X)] = E[\sum_i X_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})] = \sum_i E[X_i]E[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] = 0$$

e quindi la tesi é vera perché i processi elementari sono densi in M^2.

$\square$

2) $\|I(X)\|_{L^2} = \|X\|_{M^2}$, cioé:

$$E\left[\left|\int_0^T X_t \, dW_t\right|^2\right] = E\left[\int_0^T |X_t|^2 \, dt\right]$$

Dimostrazione: la tesi é vera per un processo elementare per come abbiamo definito l'integrale stocastico, ed é vera per tutti i processi in M^2 perché i processi elementari sono densi in M^2.

$\square$

3) se $Z \in M^2$ é $\mathcal{F}_0$-misurabile, limitata e della forma $Z(t,\omega) = Z(\omega)$, allora $I(ZX) = ZI(X)$

Dimostrazione: se X é un processo elementare, la tesi é immediata; supponiamo ora che X non sia elementare; allora esiste una successione $\{X^{(n)}\}_n$ di processi approssimano X in M^2. Se chiamiamo M la costante per cui $|Z| \leq M$, allora:

$$\|Z(X - X^{(n)})\|_{M^2} \leq M\|X - X^{(n)}\|_{M^2}$$

e quindi:

$$I(ZX_t) = \lim_{n\to\infty} I(ZX_t^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} ZI(X_t^{(n)}) = ZI(X_t)$$

$\square$

A volte si puó aver bisogno di una classe piú grande di M_W^2 su cui definire l'integrale stocastico. Risulta che la classe piú grande su cui si puó definire é Λ_W^2. Vediamo come.

Se $X_t = \sum X_i.\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t)$ é un processo elementare in Λ_W^2, possiamo definire il suo integrale stocastico in questo modo:

$$I(X) = \sum X_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Vogliamo ora estendere la definizione ad ogni processo appartenente a Λ_W^2. Per farlo abbiamo bisogno del lemma:

Lemma 3.3 *: se $X \in \Lambda_W^2$ é un processo elementare, allora $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N > 0$ si ha:*

$$\mathbf{P}\left\{\left|\int_0^T X_t \; dW_t\right| > \varepsilon\right\} \leq \mathbf{P}\left\{\int_0^T X_t^2 \; dt > N\right\} + \frac{N}{\varepsilon^2}$$

Per una dimostrazione vedere Baldi[1] pag. 134.

□

Possiamo ora costruire l'integrale stocastico per un generico processo $X \in \Lambda_W^2$. Per il lemma (3.2), posso approssimare X con una successione di processi elementari $\{X_n\}_n$ in Λ_W^2 tali che:

$$\int_0^T |X_n(t) - X(t)|^2 \; dt \longrightarrow^{\mathbf{P}} 0$$

Quindi $\forall \eta > 0, \delta > 0 \; \exists \nu$ tale che se $n, m > \nu$:

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T |X_n(t) - X_m(t)|^2 \; dt > \delta\right\} < \eta$$

e quindi, per il lemma precedente, $\forall N > 0$ abbiamo:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\int_0^T X_n(t) \; dW_t - \int_0^T X_m(t) \; dW_t\right| > \varepsilon\right\} \leq \mathbf{P}\left\{\int_0^T |X_n(t) - X_m(t)|^2 \; dt > N\right\} + \frac{N}{\varepsilon^2}$$

Possiamo scegliere N e ν in modo che l'ultimo membro sia minore di ε. Allora la successione di variabili aleatorie $(\int_0^T X_n(t) \; dW_t)_n$ é di Cauchy in probabilitá, e quindi ammette un limite in probabilitá. Chiamiamo questo limite:

$$I(X) = \int_0^T X_t \; dW_t$$

integrale stocastico del processo $X \in \Lambda_W^2$.

L'integrale stocastico su Λ_W^2 non gode allora delle proprietá sulla media e sulla covarianza che godeva quello su M_W^2; tuttavia, rimane questa proprietá:

- se Z é una variabile aleatoria $\mathcal{F}_0$-misurabile e limitata e $X \in \Lambda_W^2$, allora $I(ZX) = ZI(X)$

Dimostrazione: se X é un processo elementare, la tesi é immediata; supponiamo ora che X non sia elementare; allora esiste una successione $\{X_n\}_n$ di processi che approssimano X in Λ^2. Allora i processi $(ZX_n(t))_t$ sono ancora elementari, appartengono a Λ^2 e, poiché $|Z| \leq K$:

$$\int_0^T |ZX_n(t) - ZX(t)|^2 \, dt \leq K \int_0^T |X_n(t) - X(t)|^2 \, dt \longrightarrow^{\mathbf{P}} 0$$

Allora abbiamo:

$$I(ZX_t) = \lim_{n\to\infty} I(ZX_t^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} ZI(X_t^{(n)}) = ZI(X_t)$$

dove i limiti sono intesi in probabilitá.

□

3.2 Integrale stocastico dipendente dal parametro d'integrazione

Definiamo:

$I_t : \Lambda_W^2 \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

in questo modo:

$$I_t(X) = I(X.\mathbf{1}_{[0,t)}) = \int_0^t X_u \, dW_u$$

Definiamo inoltre l'integrale stocastico dipendente da un tempo di arresto; se τ é un $(\mathcal{F}t)_t$-tempo di arresto, allora definiamo:

$$I_\tau(X) = I(X\mathbf{1}_{[0,\tau)}) = \int_0^\tau X_u \, dW_u$$

allora I_t ha le seguenti proprietá:

1) $E[I_t(X)] = 0 \ \forall X \in M^2, t \in [0,T]$

2) $I_t(X) - I_s(X) = I(X.\mathbf{1}_{[s,t)}) = \int_{[s,t)} X_u \, dW_u$

3) $I_T(X) = I(X)$

4) $I_t(X)$ é $\mathcal{F}_t$-misurabile

Dimostrazione: se X é un processo elementare, allora:

$$I_t(X) = \sum_{t_{i+1}<t} X_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + X_k(W_t - W_k)$$

é $\mathcal{F}_t$-misurabile; siccome $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ é chiuso in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, allora abbiamo la tesi.

□

5) il processo $(I_t(X))_t$ ha una versione continua $\forall X \in \Lambda_2$

Per una dimostrazione vedere Baldi[1] pagg. 142 - 144.

6) il processo $(I_t(X))_t$ é una martingala $\forall X \in M_2$, ed é una martingala locale $\forall X \in \Lambda_2$

Dimostrazione: provare la condizione di martingala equivale a provare che, se $t > s$, allora $\forall Z$ variabile aleatoria $\mathcal{F}_s$-misurabile e limitata, abbiamo $E[Z(I_t(X) - I_s(X))] = 0$; ma:

$$E[Z(I_t(X) - I_s(X))] = E\left[Z \int_s^t X_u \, dW_u\right] = 0$$

e abbiamo la prima parte della tesi.

Per provare la seconda parte, definiamo i tempi d'arresto:

$$\rho_n = \begin{cases} \inf\{t \in [0,T] \mid |\int_0^t X_u \, dW_u| \geq n\} \\ +\infty \text{ se l'insieme sopra é vuoto} \end{cases}$$

$$\eta_n = \begin{cases} \inf\{t \in [0,T] \mid \int_0^t X_u^2 \, du \geq n\} \\ +\infty \text{ se l'insieme sopra é vuoto} \end{cases}$$

e $\tau_n = \rho_n \wedge \eta_n$; allora anche i τ_n sono dei tempi di arresto; inoltre, $\{\tau_n\}_n$ é crescente, e $\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty$, perché le funzioni $t \to \int_0^t X_u \, dW_u$ e $t \to \int_0^t X_u^2 \, du$ sono continue in t per ogni ω fissato, e dunque limitate. Allora abbiamo che:

$$I_{t\wedge\tau}(X) = \int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau_n)} X_u \, dW_u$$

é l'integrale stocastico di un processo in M^2, ed é quindi una martingala limitata da n. Abbiamo quindi la tesi.

□

3.3 Integrale stocastico rispetto ad un moto browniano $k-$dimensionale

Dato un moto browniano $k-$dimensionale standard $(W(t))_t$, e un numero reale $p \geq 1$, definiamo le seguenti classi di processi a valori nelle matrici $k \times n$-dimensionali:

$$\Lambda_W^p([0,T];\mathbf{R}^{k\times n}) = \left\{ (X_t)_t \,\middle|\, X \text{ progr. mis. e t.c. } \mathbf{P}\left\{ \int_0^T \|X_s\|_F^p \, ds < +\infty \right\} = 1 \right\}$$

$$M_W^p([0,T];\mathbf{R}^{k\times n}) = \left\{ (X_t)_t \,\middle|\, X \in \Lambda_W^p \text{ e } E\left[\int_0^T \|X_s\|_F^p \, ds \right] < +\infty \right\}$$

dove la norma matriciale $\|.\|_F$ é la **norma di Frobenius**:

$$\|A\|_F = \text{Tr } (A.^tA) = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$$

che, se calcolata su un vettore di $\mathbf{R}^n$, coincide con quella euclidea.

Notiamo quindi che un processo X appartiene a $\Lambda_W^p([0,T];\mathbf{R}^{k\times n})$ (rispettivamente a $M_W^p([0,T];\mathbf{R}^{k\times n})$) se e solo se $X_{ij} \in \Lambda_W^p([0,T];\mathbf{R})$ (risp. $X_{ij} \in M_W^p([0,T];\mathbf{R})$) $\forall i = 1,...,k, j = 1,...,n$.

D'ora in poi, se non ci sará pericolo di confusione, indicheremo anche queste due classi con Λ^p e M^p (specificando peró sempre se si tratta di processi reali o a valori nelle matrici).

Possiamo definire l'integrale stocastico in questo modo: chiamiamo **integrale stocastico $k-$dimensionale** la variabile aleatoria n-dimensionale:

$$\int_0^T X_t \, dW_t = \left(\sum_{j=1}^k \int_0^T X_{ij}(t) \, dW_j(t) \right)_{i=1,\dots,n}$$

L'integrale stocastico $k-$dimensionale gode delle seguenti proprietá:

1) $E[I(X)] = E\left[\int_0^T X_t \, dW_t\right] = 0$

2) se $i \neq j$, e $(X(t))_t \in M_{W_i}^2$, $(Y(t))_t \in M_{W_j}^2$, allora:

$$E\left[\int_0^T X(t) \, dW_i(t) \int_0^T Y(t) \, dW_j(t) \right] = 0$$

Dimostrazione: se $(X(t))_t$ e $(Y(t))_t$ sono processi della forma $X(t) = X.\mathbf{1}_{[a,b)}(t)$, $Y(t) = Y.\mathbf{1}_{[a,b)}(t)$, con X, Y variabili aleatorie in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_a, \mathbf{P})$, allora:

$$E\left[\int_0^T X(t) \, dW_i(t) \int_0^T Y(t) \, dW_j(t) \right] = E[X(W_i(b) - W_i(a))Y(W_j(b) - W_j(a))] =$$

$$= \quad E[XY]E[W_i(b) - W_i(a)]E[W_j(b) - W_j(a)] =$$
$$= \quad E[XY].0 = 0$$

quindi la tesi vale per processi elementari e, per densitá, anche per generici processi $X \in M^2_{W_i}$, $Y \in M^2_{W_i}$.

$\square$

3) l'integrale stocastico k-dimensionale é una isometria tra gli spazi $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \mathbf{R}^n)$ e $M^2_W([0,T]; \mathbf{R}^{k\times n}$; questo significa:

$$\|I(X)\|_{L^2} = E\left[\left\|\int_0^T X_t \ dW_t\right\|_n^2\right] = E\left[\int_0^T \|X_t\|_F^2 \ dt\right] = \|X\|_{M^2}$$

Dimostrazione: si ha:

$$\begin{aligned} E\left[\left\|\int_0^T X_t \ dW_t\right\|_n^2\right] &= E\left[\left\|(\sum_j \int_0^T X_{ij}(t) \ dW_j(t))_i\right\|_n^2\right] = \\ &= E\left[\sum_i (\sum_j \int_0^T X_{ij}(t) \ dW_j(t))_i^2\right] = \\ &= \sum_i \sum_{jk} E\left[\int_0^T X_{ij}(t) \ dW_j(t) \int_0^T X_{ik}(t) \ dW_k(t)\right] \end{aligned}$$

Ricordiamo che, se X e Y appartengono a M^2_W, allora:

$$E\left[\int_0^T X(t) \ dW_j(t) \int_0^T Y(t) \ dW_j(t)\right] = E\left[\int_0^T X(t)Y(t) \ dt\right]$$

se invece $j \neq k$, abbiamo che:

$$E\left[\int_0^T X(t) \ dW_j(t) \int_0^T Y(t) \ dW_k(t)\right] = 0$$

Allora:

$$E\left[\left\|\int_0^T X_t \ dW_t\right\|_F^2\right] = \sum_i \sum_j E\left[\int_0^T X_{ij}^2(t) \ dt\right] = E\left[\int_0^T \|X_t\|_F^2 \ dt\right]$$

$\square$

4) se Z é una variabile aleatoria $\mathcal{F}_0$-misurabile e limitata, allora: $I(ZX) = ZI(X)$

La dimostrazione é analoga al caso unidimensionale.

Anche in questo caso si puó definire l'integrale stocastico su Λ^2_W tramite la relazione

$$I(X) = \int_0^T X(t)\ dW(t) = (\sum_j \int_0^T X_{ij}(t)\ dW_j(t))_i$$

L'integrale stocastico su Λ^2_W gode allora della proprietá:

1) se Z é una variabile aleatoria $\mathcal{F}_0$-misurabile e limitata, allora: $I(ZX) = ZI(X)$

Per studiare l'integrale stocastico dipendente dal parametro d'integrazione, definiamo:

$I_t : \Lambda^2_W([0,T]; \mathbf{R}^{k\times n}) \to L^2(\Omega, F, P; \mathbf{R}^n)$

in questo modo:

$$I_t(X) = I(X.\mathbf{1}_{[0,t)}) = \int_0^t X_u\ dW_u$$

allora I_t ha le seguenti proprietá:

1) $E[I_t(X)] = 0\ \forall X \in M^2, t \in [0,T]$

2) $I_t(X) - I_s(X) = I(X.\mathbf{1}_{[s,t)}) = \int_{[s,t)} X_u\ dW_u$

3) $I_T(X) = I(X)$

4) $I_t(X)$ é $\mathcal{F}_t$-misurabile

5) il processo $(I_t(X))_t$ é una martingala $\forall X \in M_2$, ed é una martingala locale $\forall X \in \Lambda_2$

Queste proprietá si dimostrano usando le proprietá dell'integrale stocastico unidimensionale.

3.4 Integrale stocastico di una funzione deterministica

Supponiamo ora di avere un processo della forma particolare $(X_t)_t = (f(t))_t$, dove f é una funzione deterministica appartenente a $L^2([0,T])$. Notiamo subito che questo processo appartiene ad M^2_W, e in particolare:

$$\|X\|^2_{M^2} = \int_{\Omega\times[0,T]} X_t^2\ d\mathbf{P}\ dt = \int_{\Omega\times[0,T]} f^2(t)\ dt = \|f\|_{L^2} < +\infty$$

e quindi il processo $I_t(X)$ é ben definito, ed é una martingala. Vogliamo ora provare che é un processo gaussiano, e calcolarne la legge.

Lemma 3.4 *: se $f \in L^2([0,T])$, allora il processo $(I_t(f))_t = (\int_0^T f(t)\ dW_t)_t$ é gaussiano, con media* 0 *e covarianza $Cov(I_s(X), I_t(X)) = \|f\|_{L^2([0,s])}\ \forall s < t$.*

Dimostrazione: supponiamo che f sia una funzione semplice, della forma $f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}$. Allora:

$$\int_0^T f(t)\ dW_t = \sum_{i=1}^n a_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

é una variabile aleatoria gaussiana; allora, siccome le funzioni semplici sono dense in L^2, allora $\forall f \in L^2\ \exists \{g_n\}_n \subseteq L^2$ successione di funzioni semplici tali che $g_n \to^{L^2} f$; allora, se definisco la successione di processi $\{X^{(n)}\}_n \subseteq M^2$ tali che

$$X_t^{(n)}(\omega) = g_n(t)\ \forall \omega \in \Omega$$

allora $\|I(I(X^{(n)}) - I(X)\|_{L^2} = \|X - X^{(n)}\|_{M^2} = \|f - g_n\|_{L^2}$, e quindi $I(X^{(n)}) \to^{L^2} I(X)$. Siccome lo spazio delle variabili aleatorie gaussiane é chiuso in L^2, allora $I(X)$ é una variabile aleatoria gaussiana. Chiaramente anche

$$I_t(X) = \int_0^t f(u)\ dW_u = \int_0^T \mathbf{1}_{[0,t)}(u) f(u)\ dW_u$$

é l'integrale stocastico di una funzione deterministica, e quindi la variabile aleatoria $I_t(X)$ é gaussiana.

Verifichiamo infine che il processo $(I_t(X))_t$ é gaussiano; per questo é sufficiente controllare che $\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbf{R}$, $\forall t_1 < ... < t_n \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \lambda_i I_{t_i}(X) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_0^{t_i} f(t)\ dW_t = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_0^T \mathbf{1}_{[0,t_i)}(u) f(u)\ dW_u = \\ &= \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{[0,t_i)}(u) f(u) \right)\ dW_u\end{aligned}$$

é l'integrale stocastico di una funzione deterministica, e quindi é una variabile aleatoria gaussiana.

Poiché il processo $(I_t(X))_t$ é gaussiano, allora la sua legge é determinata univocamente dalla sua media e dalla sua covarianza. Calcoliamole:

$$E[I_t(X)] = 0$$

$$\begin{aligned}Cov(I_s(X), I_t(X)) &= Cov\left(\int_0^s f(u)\ dW_u, \int_0^t f(u)\ dW_u\right) = \\ &= Cov\left(\int_0^s f(u)\ dW_u, \int_0^s f(u)\ dW_u + \int_s^t f(u)\ du\right)\end{aligned}$$

Siccome il secondo addendo é indipendente da $\mathcal{F}_s$, allora:

$$Cov(I_s(X), I_t(X)) = Var\left[\int_0^s f(u)\ dW_u\right] = \int_0^s f^2(u)\ du = \|f\|_{L^2([0,s])}$$

e la legge del processo $(I_t(X))_t$ é univocamente determinata.

$\square$

Capitolo 4

Differenziale stocastico e sue proprietá

4.1 Definizione e prime proprietá

Se abbiamo un processo $(X_t)_t$, un moto browniano standard $k-$dimensionale $(W_t)_t$ e due processi $f \in \Lambda^1_W([0,T];\mathbf{R}^{1\times n})$ e $g \in \Lambda^2_W([0,T];\mathbf{R}^{k\times n})$, diciamo che il processo $(X_t)_t$ é dotato del **differenziale stocastico**

$$dX_t = f_t\ dt + g_t\ dW_t$$

se abbiamo:

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s\ ds + \int_0^t g_s\ dW_s$$

I processi di questo tipo sono un esempio di **processi di Ito**. Innanzitutto, notiamo subito che questi processi sono a traiettorie continue. Inoltre, la loro scrittura in termini di differenziale stocastico é unica. Ció seguirá dalla seguente:

Proposizione 4.1 *: se $(M_t)_t$ é una martingala della forma $M_t = \int_0^t f_u\ du$, con $(f_t)_t \in \Lambda^1$, allora $f_t = 0\ dt \times \mathbf{P}$-q.c.*

Dimostrazione: supponiamo dapprima che $\int_0^T |f_u|\ du \leq C$ $\mathbf{P}$-q.c.; definisco i tempi $t^i_n = \frac{i}{2^n}T$; allora ho che:

$$\lim_{n\to+\infty} E[\sum_1^{2^n}{}_i(M_{t^i_n} - M_{t^{i-1}_n})^2] = 0$$

Infatti, l'espressione da mediare é dominata $\mathbf{P}$-q.c.:

$$\sum_1^{2^n}{}_i \left(\int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} f_u\ du\right)^2 \le C \sum_1^{2^n}{}_i \int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} |f_u|\ du = C \int_0^T |f_u|\ du \le C^2$$

inoltre, per quasi ogni ω, la successione $\sum_{i=1}^{2^n} \left(\int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} f_u\ du\right)^2$ tende a 0 per $n \to \infty$. Per dimostrare questo, notiamo che la funzione $t \to \int_0^t |f_u|\ du$ é continua su $[0, T]$, quindi uniformemente continua, e quindi $\forall \varepsilon\ \exists n_0$ tali che $\forall i, \forall n > n_0$ abbiamo:

$$\int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} |f_u|\ du < \varepsilon$$

allora, $\forall \varepsilon\ \exists n^0$ tale che $\forall n > n_0$:

$$\sum_1^{2^n}{}_i \left(\int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} |f_u|\ du\right)^2 < \varepsilon \int_0^T |f_u|\ du \le \varepsilon C$$

Per definizione di limite, questo significa che:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^{2^n}{}_i \left(\int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} |f_u|\ du\right)^2 = 0$$

e quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^{2^n}{}_i \left(\int_{t_n^{i-1}}^{t_n^i} f_u\ du\right)^2 = 0$$

Allora, poiché la successione é definitivamente dominata da $C\varepsilon$, per il teorema di Lebesgue il limite della speranza é zero.

A questo punto, peró, notiamo che, siccome $(M_t)_t$ é una martingala, $M_t - M_s$ é ortogonale rispetto a $\mathcal{F}_s\ \forall t > s$; allora:

$$\begin{aligned}
E[(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})^2] &= E[(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})^2] + 2E[M_{t_n^{i-1}}(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})] = \\
&= E[(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}}) + 2M_{t_n^{i-1}}(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})] = \\
&= E[(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})(M_{t_n^i} + M_{t_n^{i-1}})] = E[M_{t_n^i}^2 - M_{t_n^{i-1}}^2]
\end{aligned}$$

quindi, siccome $M_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} E[\sum_1^{2^n}{}_i (M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})^2] &= \lim_{n\to+\infty} \sum_1^{2^n}{}_i E[(M_{t_n^i} - M_{t_n^{i-1}})^2] = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_1^{2^n}{}_i E[M_{t_n^i}^2 - M_{t_n^{i-1}}^2] = \lim_{n\to+\infty} E[M_T^2 - M_0^2] = \\
&= \lim_{n\to+\infty} E[M_T^2] = 0
\end{aligned}$$

allora, $M_T = 0$ $\mathbf{P}$-q.c., e quindi $M_t = 0$ $dt \times \mathbf{P}$-q.c.; ció significa che $f_t = 0$ $dt \times \mathbf{P}$-q.c.

Supponiamo ora che $(f_t)_t \in \Lambda^1$; allora definiamo il tempo di arresto:

$$T_n = \begin{cases} \inf\{0 \leq t \leq T \mid \int_0^t |f_u| \, du \geq n\} \\ T \text{ se l'insieme di sopra e' vuoto} \end{cases}$$

la successione $(T_n)_n$ é dominata da T, é crescente in n, quindi ha sempre limite. Siccome $(f_t)_t \in \Lambda^1$, allora q.c. $\exists n^*$ tale che $\int_0^t |f_u| \, du < n^*$, quindi $T_{n^*} = T$, e $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ $\mathbf{P}$-q.c.; allora $\forall n \in \mathbf{N} : (M_{t\wedge T_n})_t$ é una martingala e soddisfa le ipotesi della parte precedente, quindi $M_{t\wedge T_n} = 0$ $\forall t$; tuttavia, $\lim_{n\to\infty} M_{t\wedge T_n} = M_{t\wedge T} = M_t$, quindi $M_t = 0$ $\forall t$, ed infine $f_t = 0$ $dt \times \mathbf{P}$-q.c.

$\square$

Corollario 4.2 *: se $(X_t)_t$ é un processo di Ito ammettente due differenziali stocastici $dX_t = f_t^{(i)} \, dt + g_t^{(i)} \, dW_t$, allora $f_t^{(1)} = f_t^{(2)}$ e $g_t^{(1)} = g_t^{(2)}$ $dt \times \mathbf{P}$-q.c.*

Dimostrazione: il processo

$$\left(\int_0^t (f_u^{(1)} - f_u^{(2)}) \, du + \int_0^t (g_t^{(1)} - g_t^{(2)}) \, dW_u \right)_t$$

é identicamente nullo, e quindi é una martingala locale; siccome anche

$$\left(\int_0^t (g_t^{(1)} - g_t^{(2)}) \, dW_u \right)_t$$

é una martingala locale, allora anche

$$\left(\int_0^t (f_u^{(1)} - f_u^{(2)}) \, du \right)_t$$

lo é. Prendiamo allora una successione di tempi di arresto $(T_n)_n$ che la riduca, ed otteniamo che

$$\left(\int_0^{t\wedge T_n} (f_u^{(1)} - f_u^{(2)}) \, du \right)_t$$

é una martingala; per quanto visto prima, $f_t^{(1)} = f_t^{(2)}$ $dt \times \mathbf{P}$-q.c. Abbiamo allora che $\int_0^t (g_u^{(1)} - g_u^{(2)}) \, dW_u = 0$. Siccome il processo

$$\left(\int_0^t (g_u^{(1)} - g_u^{(2)}) \, dW_u \right)_t$$

é una martingala locale, prendiamo la successione $(T_n)_n$ di tempi di arresto:

$$T_n = \begin{cases} \inf\{0 \leq t \leq T | \int_0^t (g_u^{(1)} - g_u^{(2)})\ du \geq n\} \\ T \text{ se l'insieme di sopra e' vuoto} \end{cases}$$

che la riduce; allora $\left(\int_0^{t\wedge T_n} (g_u^{(1)} - g_u^{(2)})\ dW_u\right)_t$ é una martingala costantemente nulla, e abbiamo:

$$0 = \left\| \int_0^{t\wedge T_n} (g_u^{(1)} - g_u^{(2)})\ dW_u \right\|_{L^2}^2 = E\left[\int_0^{t\wedge T_n} (g_u^{(1)} - g_u^{(2)})^2\ du\right]$$

e quindi $g_t^{(1)} = g_t^{(2)}$ $\forall t < T_n$ $\mathbf{P}$-q.c.. Siccome anche ora $\lim_{n\to\infty} T_n = T$, ho che $g_t^{(1)} = g_t^{(2)}$ $\forall t < T$.

□

Se $(X_t)_t$ é un processo di Ito, dotato del differenziale stocastico:

$$dX_t = f_t\ dt + g_t\ dW_t$$

con $(f_t)_t \in \Lambda_W^1$ e $(g_t)_t \in \Lambda_W^2$, allora esiste una modificazione di $(X_t)_t$ a traiettorie continue; infatti, l'integrale $\int_0^t f_u\ du$ é continuo in t, e l'integrale stocastico $\int_0^t g_u\ dW_u$ é continuo in virtú della proposizione (?).

Nel caso di coefficienti $(f_t)_t, (g_t)_t \in M^2([0,T])$, possiamo trovare ulteriori proprietá di continuitá.

Specifichiamo meglio questo concetto, definendo la seguente classe di processi:

$$C_p([0,T]) = \{(X_t)_t | X \in C^0([0,T], L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)) \text{ ed e' progr. mis.}\}$$

allora $C_p([0,T])$ é uno spazio di Banach rispetto alla norma:

$$\|X\|_{C_p([0,T])} = \sup_{t\in[0,T]} \|X_t\|_{L^2(\Omega)}$$

Notiamo subito che $C_p([0,T]) \subseteq M^2([0,T])$, e che vale questa relazione tra le norme:

$$\|X\|_{M^2([0,T])} \leq T.\|X\|_{C_p([0,T])}$$

Vediamo ora in che senso i processi della forma precedente sono continui:

Lemma 4.3 *: se $(f_t)_t, (g_t)_t \in M^2([0,T])$ ed il processo $(X_t)_t$ é definito come sopra, allora $(X_t)_t \in C_p([0,T])$*

Dimostrazione: si verifica banalmente che il processo $(X_t)_t$ é progressivamente misurabile; controlliamo ora che sia un processo continuo:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\left\|\int_t^{t+h} f_t\ dt+\int_t^{t+h} g_t\ dW_t\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \lim_{h\to 0} 2\left(\left\|\int_t^{t+h} f_t\ dt\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\int_t^{t+h} g_t\ dW_t\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\leq\\
&\leq \lim_{h\to 0} 2\left(\int_t^{t+h}\|f_t\|^2_{L^2(\Omega)}\ dt+\int_\Omega\int_t^{t+h}|g_t|^2\ dt\ dP\right)=\\
&= \lim_{h\to 0} 2\left(\int_t^{t+h}\left(\|f_t\|^2_{L^2(\Omega)}+\|g_t\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\ dt\right)=0
\end{aligned}$$

cioé $(X_t)_t\in C_p([0,T])$.

$\square$

4.2 Formula di Ito

Dalla definizione di differenziale stocastico si ricava immediatamente che il differenziale della somma é uguale alla somma dei differenziali. Sorge ora il problema di determinare se esiste e quale é il differenziale stocastico di una generica funzione ϕ di t e di X_t rispetto a dt ed a dW_t. Ci viene qui in aiuto il seguente

Teorema 4.4 *: se $\phi\in C^2(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$, allora:*

$$\begin{aligned}
d\phi(t,X_t) &= \left(\phi_t(t,X_t)+\vec{\nabla}_x\phi(t,X_t).f_t+\frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\phi(t,X_t)(g.{}^tg)_{ij}\right)\ dt+\\
&+ \vec{\nabla}_x\phi(t,X_t).g_t\ dW_t
\end{aligned}$$

dove $\vec{\nabla}_x$ é il gradiente calcolato limitatamente alle componenti del vettore x.

La formula che ci dá la trasformazione é nota come **formula di Ito**.

Per una dimostrazione formale della formula (nel caso in cui $n=1$) rimandiamo a Baldi[1], pagg. 155 - 161. Vediamo invece un rapido (ma assolutamente non rigoroso) modo per ricavare questa formula. Interpretiamo la scrittura dx come un "piccolo incremento" nella variabile x, e diamo quindi questo senso a dX_t, dW_t e dt; in virtú del fatto che $W_{t+h}-W_t$ é indipendente da $\mathcal{F}_t$ (e quindi scorrelata da ogni W_s, $s<t$) ed ha legge $N(0,h)$, stabiliamo che $(dW_t)^2=dt.I$, dove I é la matrice identica $n\times n$.

Scriviamo ora lo "sviluppo di Taylor" di $\phi(t,X_t)$ al secondo ordine, tenendo solo i termini di ordine minore o uguale a dt (quindi, per quanto abbiamo detto, dt, dW_t e $(dW_t)^2$):

$$d\phi(t,X_t)=\phi_t\ dt+\vec{\nabla}_x\phi(t,X_t)\ dX_t+\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\phi(t,X_t)\ dX_i\ dX_j$$

e sostituiamo rispettivamente a dX_t il differenziale da cui siamo partiti ed a $dX_i dX_j$:

$$\begin{aligned}
dX_i dX_j &= (f_i\ d_t + \sum g_{ik}\ dW_t^k)(f_j\ dt + \sum g_{jk}\ dW_t^k) = \\
&= \sum g_{ik} g_{jl}\ dW_t^k\ dW_t^l = \sum g_{ik} g_{jk}\ (dW_t^k)^2 = \\
&= \sum g_{ik} g_{jk}\ dt = (g.{}^t g)\ dt
\end{aligned}$$

si arriva alla formula di Ito.

□

Facciamo ora un esempio di utilizzo della formula di Ito. Prendiamo i processi di Ito $(X_t)_t$ e $(Y_t)_t$:

$dX_t = f_t\ dt + g_t\ dW_t$
$dY_t = \tilde{f}_t\ dt + \tilde{g}_t\ dW_t$

e controlliamo se esiste e qual é il differenziale stocastico di $(X_t.Y_t)_t$. Applichiamo la formula di Ito ai due processi $(X_t^2)_t$ e $(Y_t^2)_t$:

$$\begin{aligned}
dX_t^2 &= (2X_t f_t + g_t^2)\ dt + 2X_t g_t\ dW_t \\
dY_t^2 &= (2Y_t \tilde{f}_t + \tilde{g}_t^2)\ dt + 2Y_t \tilde{g}_t\ dW_t \\
d(X_t + Y_t)^2 &= (2(X_t + Y_t)(f_t + \tilde{f}_t) + (g_t + \tilde{g}_t)^2)\ dt + \\
&+ \ 2(X_t + Y_t)(g_t + \tilde{g}_t)\ dW_t
\end{aligned}$$

Sottraendo la prima e la seconda riga dalla terza abbiamo:

$$2d(X_t.Y_t) = (2X_t \tilde{f}_t + 2Y_t f_t + 2g_t \tilde{g}_t)\ dt + 2(X_t \tilde{g}_t + Y_t g_t)\ dW_t$$
$$2d(X_t.Y_t) = (2X_t \tilde{f}_t + 2Y_t f_t + 2g_t \tilde{g}_t)\ dt + 2(X_t \tilde{g}_t + Y_t g_t)\ dW_t$$

che, in una scrittura piu' compatta ed espressiva, diventa:

$$d(X_t.Y_t) = X_t\ dY_t + Y_t\ dX_t + g_t \tilde{g}_t\ dW_t$$

Da questo esempio, oltre a ricavare una regola per la moltiplicazione che ci sará molto utile, apprendiamo anche che la classe dei processi di Ito é un'algebra.

Vediamo un altro esempio di uso della formula di Ito. Prendiamo il processo:

$$Z_t^\lambda = \lambda \int_0^t X_s\ dW_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t X_s^2\ ds$$

con $X_s \in \Lambda^1$; allora Z_t^λ ha il differenziale stocastico:

$$dZ_t^\lambda = -\frac{\lambda^2}{2} X_t^2 \; dt + \lambda X_t \; dW_t$$

vogliamo vedere che differenziale stocastico ha il processo:

$$Y_t = e^{Z_t^\lambda} = \exp\left(\lambda \int_0^t X_s \; dW_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t X_s^2 \; ds\right)$$

Poiché $e^{\cdot} \in C_b^2$, applichiamo la formula di Ito:

$$\begin{aligned} dY_t &= \left(e^{Z_t^\lambda}\left(-\frac{\lambda^2}{2} X_t^2\right) + \frac{\lambda^2}{2} e^{Z_t^\lambda} \lambda X_t^2\right) \; dt + e^{Z_t^\lambda} \lambda X_t \; dW_t = \\ &= e^{Z_t^\lambda} \lambda X_t \; dW_t = Y_t \lambda X_t \; dW_t \end{aligned}$$

da questa equazione ricaviamo che $(Y_t)_t$ é una martingala locale e, siccome $Y_t > 0 \; \forall t$, abbiamo che $(Y_t)_t$ é una supermartingala. Stabiliamo ora un lemma che ci sará utile in seguito.

Lemma 4.5 *: se $(X_t)_t \in M^2$, e $\int_0^T X_s^2 \; ds \leq kT$ per un certo $k > 0$, allora vale la seguente disuguaglianza, chiamata* **disuguaglianza esponenziale***:*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \left|\int_0^T X_s \; dW_s\right| \geq c\right\} \leq 4e^{-\frac{c^2}{2kT}}$$

Dimostrazione: poniamo $M_t = \int_0^t X_s \; dW_s$, e $A_t = \int_0^t X_s^2 \; ds$; allora $\forall \theta > 0$ abbiamo:

$$\{M_t \geq c\} = \{e^{\theta M_t} \geq e^{\theta c}\} \subseteq \left\{e^{\theta M_t - \frac{\theta^2}{2} A_t} \geq e^{\theta c - \frac{\theta^2}{2} kT}\right\}$$

applicando la disuguaglianza massimale alla supermartingala $(e^{\theta M_t - \frac{\theta^2}{2} A_t})_t$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} M_t \geq c\right\} &\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} e^{\theta M_t - \frac{\theta^2}{2} A_t} \geq e^{\theta c - \frac{\theta^2}{2} kT}\right\} \leq \\ &\leq e^{-\theta c + \frac{\theta^2}{2} kT}\left(E\left[e^{\theta M_0 - \frac{\theta^2}{2} A_0}\right] + E\left[e^{\theta M_T - \frac{\theta^2}{2} A_T}\right]\right) \leq \\ &\leq 2e^{-\theta c + \frac{\theta^2}{2} kT} \end{aligned}$$

questo vale $\forall \theta > 0$, quindi anche per $\theta = \frac{c}{kT}$, che minimizza l'ultimo membro. Allora abbiamo:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} M_t \geq c\right\} \leq 2e^{-\frac{c^2}{2kT}}$$

Con lo stesso ragionamento, applicato a $(-M_t)_t$, si prova che:

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{0\leq t\leq T} M_s \leq -c\right\} \leq 2e^{-\frac{c^2}{2kT}}$$

da queste due disuguaglianze segue la tesi.

$\square$

4.3 Il teorema di Girsanov

Supponiamo di avere il processo $(X_t)_t$ dotato di differenziale stocastico:

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t$$

Ci chiediamo se puó esistere una misura di probabilitá $\tilde{\mathbf{P}}$ tale che $(X_t)_t$ sia una $\tilde{\mathbf{P}}$-martingala.

Piú precisamente, diciamo che $\tilde{\mathbf{P}}$ é una **misura di martingala equivalente** a $\mathbf{P}$ rispetto al processo $(X_t)_t$ se:
- $\tilde{\mathbf{P}}$ é equivalente a $\mathbf{P}$
- $(X_t)_t$ é una $\tilde{\mathbf{P}}$-martingala

Il modo classico per risolvere questo problema é quello di scrivere il processo $(X_t)_t$ nella forma:

$$dX_t = \sigma_t d\tilde{W}_t$$

(che chiaramente andrá intesa nel senso integrale), dove $(\tilde{W}_t)_t$ é un opportuno processo. Se $\sigma_t \neq 0$ $\forall t$ q. c., e $(\sigma_t^{-1} b_t)_t \in \Lambda_W^1$, allora un possibile candidato per questo puó essere il processo $(\tilde{W}_t)_t$ cosí definito:

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \sigma_s^{-1} b_s \, ds$$

Tuttavia c'é il problema di stabilire che significato dare ad una espressione del tipo $\int_0^t g_t \, d\tilde{W}_t$. Scopriremo che il processo $(\tilde{W}_t)_t$ é un moto browniano, tuttavia non rispetto alla probabilitá $\mathbf{P}$, ma rispetto ad una misura di probabilitá $\tilde{\mathbf{P}}$ equivalente a $\mathbf{P}$.

Prendiamo ora un altro processo $(\phi_t)_t \in M_W^2$, e definiamo il processo $(Z_t)_t$ in questo modo:

$$Z_t = exp\left(\int_0^t \phi_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\phi_s|^2 \, ds\right)$$

Come abbiamo giá visto, il processo Z_t verifica l'equazione $dZ_t = Z_t \phi_t \, dW_t$.

Proposizione 4.6 *: se $\exists K$ tale che $\int_0^T |\phi_s|\ ds \leq K$, allora $(Z_t)_t$ é una martingala limitata in L^p $\forall p$*

Per dimostrare questa proposizione ci servirá il seguente lemma:

Lemma 4.7 *: se $f \in C^1(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ tale che $f(0) = 0$, ed X é una variabile aleatoria reale positiva, allora:*

$$E[f(X)] = \int_0^{+\infty} f'(\rho) P\{X \geq \rho\}\ d\rho$$

Dimostrazione: se chiamo μ la legge di X, applicando il teorema di Fubini al sottoinsieme $\{(\rho, x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ | x \geq \rho\}$ di $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, ho:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f'(\rho)\mathbf{P}\{X \geq \rho\}\ d\rho &= \int_0^{+\infty} f'(\rho) \int_\rho^{+\infty} \mu(dx)\ d\rho = \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^x f'(\rho)\ d\rho\ \mu(dx) = \int_0^{+\infty} [f(\rho)]_0^x\ \mu(dx) = \\
&= \int_0^{+\infty} f(x)\ \mu(dx) = E[f(X)]
\end{aligned}$$

□

Passiamo ora alla dimostrazione della proposizione

Dimostrazione: poniamo $Z_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |Z_s|$; allora abbiamoo che:

$$\int_0^T |\phi_s|^2 |Z_s|^2\ ds \leq K Z_T^{*2}$$

quindi, se $Z_T^* \in L^2(\Omega)$, allora $(\phi_t Z_t)_t \in M^2$, e quindi, poiché $dZ_t = Z_t \phi_t\ dW_t$, allora $(Z_t)_t$ é una martingala limitata in $L^2(\Omega)$. Prendiamo ora $\rho > 0$; allora, per la disuguaglianza esponenziale:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{Z_T^* \geq \rho\} &\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \exp\left(\int_0^t \phi_s\ dW_s\right) \geq \rho\right\} = \\
&= \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \phi_s\ dW_s \geq \log(\rho)\right\} \leq 4 \exp\left(-\frac{(\log \rho)^2}{2K}\right)
\end{aligned}$$

allora, per $\rho \to +\infty$, $\mathbf{P}\{Z_T^* \geq \rho\} \to 0$ piú velocemente di qualsiasi polinomio. Usando il lemma sulla funzione $\rho \to \rho^p$, ricaviamo che:

$$E[Z_T^{*p}] = \int_0^{+\infty} p\rho^{p-1} \mathbf{P}\{Z_T^* \geq \rho\}\ d\rho < +\infty\ \forall p \geq 1$$

e quindi $(Z_t)_t$ é una martingala ed é limitata in L^p $\forall p \geq 1$.

$\square$

Abbiamo allora che $E[Z_t] = E[Z_0] = 1$ $\forall t \in [0, T]$; siccome $Z_t > 0$ $\forall t$, possiamo definire la misura di probabilitá $d\tilde{\mathbf{P}} = Z_T.d\mathbf{P}$ equivalente a $\mathbf{P}$. Da ora in poi indichiamo con $E_{\mathbf{P}}[.]$ la speranza calcolata rispetto a $\mathbf{P}$, e con $E_{\tilde{\mathbf{P}}}[.]$ la speranza calcolata rispetto a $\tilde{\mathbf{P}}$.

Il seguente teorema é noto come **teorema di Girsanov**.

Teorema 4.8 *: supponiamo che $(\phi_t)_t \in \Lambda^2_W$, e che il processo $(Z_t)_t$ definito sopra sia una martingala. Allora il processo*

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \phi_s \, ds$$

é un moto browniano rispetto a $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P}, (\mathcal{F}_t)_t)$

Per una dimostrazione vedere Baldi[1], pagg. 176 - 178.

$\square$

Allora, possiamo definire l'integrale stocastico rispetto al processo $(\tilde{W}_t)_t$ in modo analogo a quanto fatto con $(W_t)_t$. Notiamo innanzitutto che $\Lambda^p_W = \Lambda^p_{\tilde{W}}$ $\forall p \geq 1$, poiché $\mathbf{P}$ é equivalente a $\tilde{\mathbf{P}}$; tuttavia, $M^p_W \neq M^p_{\tilde{W}}$. Vediamo ora che legami hanno i due integrali stocastici:

Lemma 4.9 *: se $(Y_t)_t \in \Lambda^2_W$, allora:*

$$\int_0^t Y_s \, d\tilde{W}_s = \int_0^t Y_s \, dW_s - \int_0^t Y_s \phi_s \, ds$$

Dimostrazione: supponiamo che Y sia un processo elementare $Y_t = \sum Y_{t_i} \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i]}$; allora:

$$\begin{aligned} \int_0^t Y_s \, d\tilde{W}_s &= \sum Y_{t_i}(\tilde{W}_{t_{i-1}} - \tilde{W}_{t_i}) = \sum Y_{t_i}(W_{t_{i-1}} - W_{t_i}) - \sum Y_{t_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi_s \, ds \\ &= \int_0^t Y_s \, dW_s - \int_0^t Y_s \phi_s \, ds \end{aligned}$$

Se prendiamo un generico processo $(Y_t)_t \in \Lambda^2_W$ e lo approssimiamo con processi elementari, allora per ognuno di questi processi vale l'uguaglianza di sopra; al tendere della successione ad $(Y_t)_t$, il primo membro tende a $\int_0^t Y_s \, d\tilde{W}_s$ in probabilitá rispetto a $\tilde{\mathbf{P}}$, il primo integrale al secondo membro tende a $\int_0^t Y_s \, dW_s$ in probabilitá rispetto a $\mathbf{P}$; siccome sia $(Y_t)_t$ che $(\phi_t)_t$ sono in Λ^2_W, e la convergenza in probabilitá $\mathbf{P}$ é equivalente a quella in $\tilde{\mathbf{P}}$, (perché $\mathbf{P}$ e $\tilde{\mathbf{P}}$ sono equivalenti), allora $(Y_t.\phi_t)_t \in \Lambda^1_W$, e quindi l'ultimo integrale tende a $\int_0^t Y_s \phi_s \, ds$.

$\square$

Il seguente corollario risolve allora il problema che ci eravamo posti all'inizio:

Corollario 4.10 *: se abbiamo il processo* $(X_t)_t$ *tale che* $dX_t = b_t\ dt + \sigma_t\ dW_t$*, con* $(b_t)_t \in \Lambda^1_W([0,T];\mathbf{R}^n)$*,* $(\sigma_t)_t \in \Lambda^2_W([0,T];\mathbf{R}^{n\times n})$*,* σ_t *invertibile* $\forall t$ *q. ov. e tali che* $\int_0^T \sigma_t^{-1} b_t\ dt \leq K$ *per un* $K \in \mathbf{R}$ *fissato, allora:*

$$dX_t = \sigma_t\ d\tilde{W}_t$$

se inoltre $(\sigma_t)_t \in M^2_{\tilde{W}}$*, allora* $\tilde{\mathbf{P}}$ *é una misura equivalente di martingala per il processo* $(X_t)_t$ *con densitá* $Z_T \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

Dimostrazione: basta porre $\phi_t = -\sigma_t^{-1} b_t$, e calcolare:

$$\int_0^t \sigma_s\ d\tilde{W}_s = \int_0^t \sigma_s\ dW_s + \int_0^t \sigma_s \sigma_s^{-1} b_s\ ds = \int_0^t \sigma_s\ dW_s + \int_0^t b_s\ ds$$

Poiché $(\tilde{W}_t)_t$ é un $\tilde{\mathbf{P}}-$moto browniano, allora il processo $(X_t)_t$ é una $\tilde{\mathbf{P}}$-martingala locale; se poi $(\sigma_t)_t \in M^2_{\tilde{W}}$, allora $(X_t)_t$ é una martingala, e $\tilde{\mathbf{P}}$ é equivalente a $\mathbf{P}$ con densitá $Z_T \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})\ \forall p$, quindi $Z_T \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, e segue la tesi.

□

4.4 Teorema di rappresentazione delle martingale

Abbiamo visto, nella parte dedicata all'integrale di Ito, che, se $(X_t)_t \in M^2_W([0,T])$, allora il processo $(\int_0^t X_u\ dW_u)_t$ é una martingala continua, adattata ad $(\mathcal{F}_t)_t$ ed appartenente ad $M^2_W([0,T])$. Vogliamo ora mostrare il viceversa, cioé che ogni martingala $(M_t)_t \in M^2_W([0,T])$ adattata a $(\mathcal{F}_t)_t$ puó essere rappresentata come integrale stocastico di un opportuno processo $(X_t)_t$. Questo risultato é noto come **teorema di rappresentazione delle martingale**.

Teorema 4.11 *: se* $(W_t)_t$ *é un moto browniano m-dimensionale e* $(M_t)_t$ *é una martingala appartenente ad* $M^2_W([0,T])$ *e adattata a* $(\mathcal{F}_t)_t$*, allora* $\exists (X_t)_t \in M^2_W([0,T])$ *tale che:*

$$M_t = E[M_0] + \int_0^t X_u\ dW_u$$

e, in particolare, $(M_t)_t$ *ammette una versione continua.*

Dimostrazione: La dimostrazione si articolerá in quattro passi.

1) definiamo il sottospazio vettoriale di $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$:

$$H = \left\{ Z = c + \int_0^T X_u\ dW_u \,\middle|\, c \in \mathbf{R}, (X_t)_t \in M^2_W([0,T]) \right\}$$

e dimostriamo che é chiuso in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$.

Supponiamo di avere una successione $(Z^{(n)})_n = c_n + \int_0^t X_u^{(n)}\, dW_u$ di variabili aleatorie in H, che convergono a $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$. Allora:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} E[Z^{(n)}] = E[Z]$$

Chiamiamo $E[Z] = c$; allora la successione $Z^{(n)} - c_n = \int_0^T X_u^{(n)}\, dW_u$ tende a $Z - c$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$, quindi é di Cauchy; ricordiamo peró che:

$$\left\| \int_0^T X_u^{(n)}\, dW_u - \int_0^T X_u^{(l)}\, dW_u \right\|_{L^2} = \|X^{(n)} - X^{(l)}\|_{M^2_W([0,t])}$$

quindi la successione di processi $(X^{(n)})_n$ é di Cauchy in M^2, che é completo; allora $\exists X \in M^2$ tale che $X^{(n)} \to X$ in M^2; poiché l'integrale stocastico é una isometria, $\int_0^T X_u^{(n)}\, dW_u \to \int_0^t X_u\, dW_u$ in L^2, e quindi $Z = c + \int_0^T X_u\, dW_u$.

2) costruiamo il sottoinsieme di $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$:

$$K = \left\{ Z \,\middle|\, Z = \exp\left(c + \int_0^T \rho_u\, dW_u\right), c \in \mathbf{R}, \rho \in L^2([0,T]; \mathbf{R}^m) \right\}$$

e dimostriamo che é contenuto in H. Per fare questo costruiamo il processo:

$$\begin{aligned} Z_t &= \exp\left(c + \int_0^t \rho_u\, dW_u + \frac{1}{2}\int_0^T |\rho_u|^2\, du - \frac{1}{2}\int_0^t |\rho_u|^2\, du\right) = \\ &= \exp\left(c + \frac{1}{2}\int_0^T |\rho_u|^2\, du\right) . \exp\left(\int_0^t \rho_u\, dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t |\rho_u|^2\, du\right) \end{aligned}$$

Notiamo che il primo esponenziale é un numero reale, mentre il secondo ha un differenziale stocastico giá noto; allora ho:

$$dZ_t = Z_t \rho_t\, dW_t$$

Notiamo che, per come abbiamo definito il processo, $Z_T = \exp\left(c + \int_0^T \rho_u\, dW_u\right)$ é il generico elemento di K. Controlliamo ora che Z_T appartiene ad H:

$$Z_T = Z_0 + \int_0^T Z_u \rho_u\, dW_u = e^c + \int_0^T Z_u \rho_u\, dW_u$$

Z_T appartiene ad H se e solo se $(Z_t \rho_t)_t$ appartiene ad M^2; tuttavia, siccome $\rho_u \in L^2([0,T]; \mathbf{R}^m)$, allora $\int_0^T \|\rho_u\|\, du \leq \|\rho\|_{L^2}$, ed é quindi verificata l'ipotesi della proposizione (4.6); allora $(Z_t \rho_t)_t \in M^2$, e la tesi é verificata.

3) dimostriamo che K é denso in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$; poiché H contiene K ed é chiuso, da questo segue subito che $H = L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$.

Supponiamo che K non sia denso in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$; allora prendiamo $X \in \overline{K}^\perp$; allora X é ortogonale ad ogni variabile aleatoria del tipo

$$e^{\lambda_1 W_{t_1}^{(i_1)} + \ldots + \lambda_n W_{t_n}^{(i_n)}}$$

infatti, basta prendere un $\rho \in L^2([0,T]; \mathbf{R}^m)$ opportuno tale che

$$e^{\lambda_1 W_{t_1}^{(i_1)} + \ldots + \lambda_n W_{t_n}^{(i_n)}} = e^{<\lambda, Z>}, \text{ con } Z = \int_0^T \rho_u \, dW_u$$

Allora, per il criterio di misurabilitá di Doob, $\exists g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ misurabile e limitata tale che:

$$0 = E[X e^{<\lambda, Z>}] = E[e^{<\lambda, Z>} E[X|Z]] = E[e^{<\lambda, Z>} g(Z)]$$

Allora, se γ é la densitá di Z su $\mathbf{R}$ rispetto alla misura di Lebesgue, la funzione $g.\gamma$ ha trasformata di Laplace nulla, quindi é nulla, e quindi g é nulla. Ció significa che $E[X|W_{t_1}^{(i_1)}, \ldots, W_{t_n}^{(i_n)}] = 0$, e quindi $E[X|\mathcal{F}_T] = X = 0$. e che quindi $\overline{K}^\perp = L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$.

4) se $(M_t)_t$ é una martingala appartenente ad M_W^2, allora, siccome $M_T \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$, possiamo trovare un processo $(X_t)_t \in M_W^2$ tale che:

$$M_T = E[M_T] + \int_0^T X_u \, dW_u$$

allora, siccome $(M_t)_t$ é una martingala, abbiamo:

$$\begin{aligned} M_t &= E[M_T|\mathcal{F}_t] = E[M_T] + E[\int_0^T X_u \, dW_u|\mathcal{F}_t] = \\ &= E[M_T] + E[\int_0^t X_u \, dW_u|\mathcal{F}_t] + E[\int_t^T X_u \, dW_u|\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

siccome il primo integrale é $\mathcal{F}_t$-misurabile, ed il secondo dipende solo dagli incrementi del moto browniano dopo t, e quindi é indipendente da $\mathcal{F}_t$, si arriva all'espressione:

$$M_t = E[M_T] + \int_0^t X_u \, dW_u$$

in particolare, esiste sempre una versione di $(M_t)_t$ a traiettorie continue.

□

Capitolo 5

Equazioni differenziali stocastiche

Se abbiamo le applicazioni $b : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^n$ e $\sigma : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^{n\times n}$ misurabili, dico che $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), (X_t, W_t, \mathcal{F}_t)_t$ é soluzione dell'**equazione differenziale stocastica**:

$$dX_t = b(X_t, t)\ dt + \sigma(X_t, t)\ dW_t \tag{5.1}$$

se sono verificate le seguenti condizioni:

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ é uno spazio probabilizzato dotato della filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$, $(W_t)_t$ é un moto browniano standard e $(X_t)_t$ é un processo a valori in $\mathbf{R}^n$, entrambi adattati alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$.

- $(b(X_t, t))_t$ é un processo appartenente a Λ^1_W

- $(\sigma(X_t, t))_t$ é un processo appartenente a Λ^2_W

- il processo $(X_t)_t$ soddisfa la seguente equazione:

$$X_t = X_s + \int_s^t b(X_u, u)\ du + \int_s^t \sigma(X_u, u)\ dW_u$$

b si chiama allora coefficiente (funzione) di **drift**, mentre σ si chiama coefficiente (matrice, funzione) di **diffusione**.

C'é peró un altro concetto di soluzione di un'equazione differenziale stocastica, che é quello di soluzione forte. Diciamo che l'equazione differenziale stocastica (*) ha una **soluzione forte** se, per ogni moto browniano standard assegnato $(W_t)_t$, esiste un processo $(X_t)_t$ tale che $(X_t, W_t, \mathcal{F}_t)_t$ sia soluzione dell'equazione (*).

Data una generica soluzione $(X_t, W_t, \mathcal{F}_t)_t$, l'applicazione $t \to X_t(\omega)$ é continua $\mathbf{P}$-q. c., e definisce una applicazione misurabile $X : \Omega \to C^0([0, T], \mathbf{R}^n)$ in questo modo:

$\omega \to X_.(\omega)$

Diremo che per l'equazione (*) c'é **unicitá per traiettorie** se, date due soluzioni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), ((X_t^i)_t, (W_t)_t, (\mathcal{F}_t)_t), i = 1, 2$, abbiamo che $\mathbf{P}\{X_t^1 = X_t^2 \ \forall t \in [s, T]\} = 1$.

5.1 Teorema di esistenza e unicitá

Diamo ora un teorema di esistenza ed unicitá in ipotesi classiche, che nella dimostrazione usa un metodo di punto fisso. Ricordiamo che esistono teoremi di esistenza e teoremi di unicitá in ipotesi molto piú deboli e la cui dimostrazione segue altre idee, come ad esempio risultati di compattezza debole e di equivalenza tra l'esistenza di una soluzione ed il fatto che un opportuno processo sia una martingala locale (vedere ad esempio Ikeda-Watanabe [1], pagg. 173 - 177 per un teorema di esistenza).

Diremo che le funzioni b e σ verificano l'**ipotesi** (A) se:

– $b : \mathbf{R}^n \times [0, T] \to \mathbf{R}^n$ e $\sigma : \mathbf{R}^n \times [0, T] \to \mathbf{R}^{n\times n}$ sono misurabili

– $\exists K > 0, M > 0$ tali che $\forall x, y \in \mathbf{R}^n, t \in [0, T]$ si ha:

$$\|b(x,t)\|^2 + \|\sigma(x,t)\|^2 \leq M^2(1 + \|x\|^2)$$
$$\|b(x,t) - b(y,t)\| + \|\sigma(x,t) - \sigma(y,t)\| \leq K\|x - y\|$$

Prima di iniziare il teorema vero e proprio, ci serve un lemma:

Lemma 5.1 *: se $F \in L_p^\infty([0,T])$ e definiamo $G_t = \int_0^t F_s \, dW_s$, allora $(G_t)_t \in C_p([0,T])$, e:*

$$\|G\|^2_{C_p([0,T])} \leq T\|F\|^2_{L_p^\infty([0,T])}$$

Dimostrazione: $(G_t)_t \in C_p([0,T])$ per quanto visto sul differenziale stocastico; ne calcolo ora la norma, ricordando che l'integrale stocastico e' una isometria da $M^2([0,t])$ in $L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\|G\|^2_{C_p([0,T])} &= \sup_t \|G_t\|^2_{L^2(\Omega)} = \sup_t \|F\|^2_{M^2([0,t])} \leq \\ &\leq \sup_t t\|F\|_{C_p([0,t])} = T\|F\|^2_{C_p([0,T])}\end{aligned}$$

e abbiamo la tesi.

□

Teorema 5.2 *: se vale l'ipotesi (A), allora, dati $s \in [0,T)$ e $X_s \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, P; \mathbf{R}^n)$, esiste una soluzione forte $(X_t)_t$ di (5.1) nello spazio $C_p([0,T])$, ed é unica in traiettorie.*

Dimostrazione: costruiamo l'applicazione $\gamma : C_p([0,T]) \to C_p([0,T])$ data da:

$$\gamma(X)(t) = X_s + \int_s^t b(X_u, u)du + \int_s^t \sigma(X_u, u)dW_u$$

Notiamo che $X \in C_p([0,T])$ implica $b(X_{.},.), \sigma(X_{.},.) \in L_p^{\infty}([0,T])$, grazie alle ipotesi di misurabilitá e di crescita lineare di b e σ; da questo segue che $\gamma(X) \in C_p([0,T])$.

Il problema di trovare una soluzione a (5.1) é equivalente a quello di trovare un punto fisso per γ nello spazio $C_p([0,T])$. Tentiamo di calcolare la norma di γ; se abbiamo $X, Y \in C_p([0.T])$, ed indichiamo la norma in $C_p([0,T])$ con $\|.\|_T$, allora:

$$
\begin{aligned}
\|\gamma(X)(t) \quad - \quad \gamma(Y)(t)\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \int_s^t (b(X_u,u) - b(Y_u,u))\, du + \int_s^t (\sigma(X_u,u) - \sigma(Y_u,u))\, dW_u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \\
&\leq \left\| \int_s^t (b(X_u,u) - b(Y_u,u))\, du \right\|_{L^2(\Omega)} + \\
&\quad + \left\| \int_s^t (\sigma(X_u,u) - \sigma(Y_u,u))\, dW_u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \\
&\leq \int_s^t \|b(X_u,u) - b(Y_u,u)\|_{L^2(\Omega)}\, du + \\
&\quad + \left(\int_s^t \|\sigma(X_u,u) - \sigma(Y_u,u)\|_{L^2(\Omega)}\, dW_u \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \int_s^t K\|X_u - Y_u\|_{L^2(\Omega)}\, du + \left(\int_s^t K^2 \|X_u - Y_u\|^2_{L^2(\Omega)}\, du \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&\leq \int_s^t K\|X - Y\|_T\, du + \left(\int_s^t K^2 \|X - Y\|_T^2\, du \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= (t-s)K\|X-Y\|_T + ((t-s)K^2\|X-Y\|_T^2)^{\frac{1}{2}} = \\
&= K(t - s + \sqrt{t-s})\|X - Y\|_T
\end{aligned}
$$

Allora $\|\gamma(X) - \gamma(Y)(.)\|_T \leq K(T - s + \sqrt{T-s})\|X - Y\|_T$, e quindi:

$$
\|\gamma\|_{C_p([0,T])} \leq K(T - s + \sqrt{T-s})
$$

Ora, se $K(T - s + \sqrt{T-s}) < 1$, allora γ é una contrazione in $C_p([0,T])$, quindi ha un unico punto fisso X che, per quanto detto prima, é soluzione di (5.1).

Se invece $K(T - s + \sqrt{T-s}) \geq 1$, basta definire γ sullo spazio $C_p([s,T_0])$ per un opportuno T_0 tale che $K(T_0 - s + \sqrt{T_0 - s}) < 1$, e costruire la soluzione di (5.1) in $[s,T_0]$; dopodiché si ripete il ragionamento con istante iniziale T_0 e condizione iniziale X_{T_0}; siccome la costante di Lipschitz K di b e σ non dipende da t, cosí facendo, in un numero finito di passi si arriva a coprire tutto $[s,T]$, e ad avere quindi la soluzione.

Non abbiamo tuttavia dimostrato l'unicitá in traiettorie; per questo, supponiamo di avere due processi $(X_t)_t$ e $(Y_t)_t$ che soddisfino l'equazione; allora:

$$
\begin{aligned}
\|X_t - Y_t\|^2 &\leq 2\left\| \int_s^t (b(X_u,u) - b(Y_u,u))\, du \right\| + \left\| \int_s^t (\sigma(X_u,u) - \sigma(Y_u,u))\, dW_u \right\| \leq \\
&\leq 2(t-s) \int_s^t \|b(X_u,u) - b(Y_u,u)\|^2\, du + 2\left\| \int_s^t (\sigma(X_u,u) - \sigma(Y_u,u))\, dW_u \right\|
\end{aligned}
$$

usando la disuguaglianza di Doob abbiamo:

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{s\le t\le T}\|X_t-Y_t\|^2\right] &\le E\left[2(T-s)\int_s^T\|b(X_u,u)-b(Y_u,u)\|^2\,du\right]+\\
&\quad +2E\left[\sup_{s\le t\le T}\left\|\int_s^t(\sigma(X_u,u)-\sigma(Y_u,u))\,dW_u\right\|\right]\le\\
&\le 2(T-s)K^2\int_s^T E[\|X_t-Y_t\|^2]\,du+\\
&\quad +8E\left[\int_s^T\|\sigma(X_u,u)-\sigma(Y_u,u)\|^2\,du\right]\le\\
&\le 2(T-s)K^2\int_s^T E[\|X_t-Y_t\|^2]\,du+8K^2\int_s^T E[\|X_t-Y_t\|^2]\,du
\end{aligned}$$

Ricordando peró che $\|X-Y\|_T=0$ significa che $E[\|X_t-Y_t\|^2]=0\ \forall t\in[s,T]$, otteniamo che:

$$E\left[\sup_{s\le t\le T}\|X_t-Y_t\|^2\right]=0$$

e ció significa che le traiettorie di $(X_t)_t$ e di $(Y_t)_t$ sono uguali; abbiamo dunque dimostrato l'unicitá in traiettorie.

□

5.2 Dipendenza dal dato iniziale

Ci preoccupiamo ora di dare una stima della soluzione dell'equazione (*) in dipendenza del dato iniziale X_s.

Ricordiamo il seguente risultato classico, noto nella letteratura come **lemma di Gromwall**:

Lemma 5.3 *: se $u\in L^1([a,b]), v\in L^{\inf}([a,b]), u,v\ge 0, c\in\mathbf{R}$ e:*

$$v(t)\le c+\int_a^t u(s)v(s)\ ds$$

allora:

$$v(t)\le c.\exp(\int_a^t u(s)\ ds)$$

□

Ricordiamo inoltre la seguente disuguaglianza algebrica, di cui verrá fatto grande uso nel seguito:

$$(x_1+...+x_n)^2\le nx_1^2+...+nx_n^2$$

Lemma 5.4 *: se l'equazione (5.1) soddisfa le ipotesi (A), allora vale la seguente maggiorazione:*

$$\|X_t\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 3(\|X_s\|^2_{L^2(\Omega)} + M^2(T-s)(T-s+1)e^{M^2(t-s)(T-s+1)}$$

Dimostrazione: ricordando il significato integrale della (5.1) abbiamo:

$$\begin{aligned}
\|X_t\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 3\|X_s\|^2_{L^2(\Omega)} + +3\left\|\int_s^t b(u,X_u)\ du\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \\
&\quad +3\left\|\int_s^t \sigma(u,X_u)\ dW_u\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \\
&\leq 3\|X_s\|^2_{L^2} + 3\int_\Omega \left\|\int_s^t b(u,X_u)\ du\right\|^2\ d\mathbf{P} + 3\int_s^t \|\sigma(u,X_u)\|^2_{L^2}\ du \leq \\
&\leq 3(t-s)\|X_s\|^2_{L^2} + 3\int_s^t\int_\Omega |b(u,X_u)|^2\ d\mathbf{P}\ du + \\
&\quad +3\int_s^t\int_\Omega |\sigma(u,X_u)|^2\ d\mathbf{P}\ du \leq \\
&\leq 3\|X_s\|^2_{L^2} + 3(t-s)\int_s^t M^2(1+\|X_u\|^2_{L^2})\ du + \\
&\quad +3\int_s^t M^2(1+\|X_u\|^2_{L^2})\ du \leq \\
&\leq 3\|X_s\|^2_{L^2} + 3(T-s+1)M^2\left(T-s+\int_s^t \|X_u\|^2_{L^2}\ du\right)
\end{aligned}$$

per il lemma di Gromwall applicata alla funzione $t \to \|X_t\|^2_{L^2(\Omega)}$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
\|X_t\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq (3\|X_s\|^2_{L^2(\Omega)} + 3(T-s+1)M^2(T-s))\ e^{\int_s^t 3(T-s+1)M^2\ du} = \\
&= (3\|X_s\|^2_{L^2(\Omega)} + 3(T-s+1)M^2(T-s))\ e^{3(T-s+1)M^2(t-s)}
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.5 *: se l'equazione (5.1) soddisfa le ipotesi (A), allora vale la seguente maggiorazione:*

$$\begin{aligned}
\|X_t - X_s\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 2M^2(T-s+1). \\
&\quad .\Big((t-s) + 3(\|X_s\|^2_{L^2} + M^2(T-s)(T-s+1))(e^{M^2(T-s+1)(t-s)} - 1)\Big)
\end{aligned}$$

Dimostrazione: da calcoli analoghi a quelli del lemma si ha:

$$\begin{aligned}
\|X_t \quad - \quad X_s\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 2\left\|\int_s^t b(u,X_u)\ du\right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\left\|\int_s^t \sigma(u,X_u)\ dW_u\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \\
&\leq 2M^2\left((t-s)\int_s^t (1+\|X_u\|^2_{L^2})\ du + 2\int_s^t (1+\|X_u\|^2_{L^2})\ du\right) \leq
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ 2(T-s+1)M^2\left((t-s)+\int_s^t \|X_u\|_{L^2}^2 \ du\right) \leq \\
&\leq \ 2(T-s+1)M^2. \\
&\quad .\left((t-s)+3\int_s^t (\|X_s\|_{L^2}^2 + M^2(T-s)(T-s+1)) \ e^{M^2(u-s)(T-s+1)} \ du\right) = \\
&= \ 2M^2(T-s+1). \\
&\quad .\Big((t-s)+3(\|X_s\|_{L^2}^2 + M^2(T-s)(T-s+1))(e^{M^2(T-s+1)(t-s)}-1)\Big)
\end{aligned}
$$

□

5.3 Equazioni lineari

Trattiamo ora il caso in cui l'equazione stocastica é unidimensionale e della forma:

$$
\begin{cases} dX_t = b_t X_t \ dt + \sigma_t X_t \ dW_t \\ X_s = X \end{cases} \tag{5.2}
$$

con $b_t \in \Lambda_W^1, \sigma_t \in \Lambda_W^2$ e $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbf{P})$. Osserviamo che non siamo piú nelle ipotesi (A), sia perché non abbiamo piú dei coefficienti descritti solo da funzioni deteriministiche, sia perché non imponiamo condizioni su b o su σ che implichino la lipschitzianitá o la crescita sublineare del drift e della diffusione; tuttavia, nel caso di equazioni lineari scalari, possiamo addirittura trovare una soluzione esplicita.

Ricordiamo che la soluzione dell'equazione differenziale ordinaria:

$$
\begin{cases} \dot{x}(t) = b(t)x(t) \\ x(s) = x \end{cases}
$$

é: $x(t) = x.\exp\left(\int_s^t b(u) \ du\right)$; possiamo quindi cercare una soluzione di (5.2) di questa forma.

Cerchiamo il differenziale stocastico del processo $(\log X_t)_t$, supponendo che $X_t > 0 \ \forall t$ q.c.:

$$
\begin{aligned}
d(\log X_t) &= \left(\frac{1}{X_t} b_t X_t - \frac{1}{2X_t^2}\sigma_t X_t\right) \ dt + \frac{1}{X_t}\sigma_t X_t \ dW_t = \\
&= \left(b_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right) \ dt + \sigma_t \ dW_t
\end{aligned}
$$

cioé:

$$
\log X_t = \log X_s + \int_s^t \left(b_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right) \ du + \int_s^t \sigma_u \ dW_u
$$

e infine:

$$
X_t = X.\exp\left(\int_s^t \left(b_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right) \ du + \int_s^t \sigma_u \ dW_u\right) \tag{5.3}
$$

Abbiamo quindi una traccia di cosa puó essere la soluzione. Verifichiamo che il processo $(X_t)_t$ é soluzione per ogni condizione iniziale $X \in L^2$); consideriamo il processo

$$Y_t = \int_s^t \left(b_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right)\, du + \int_s^t \sigma_u\, dW_u$$

che ha il differenziale stocastico:

$$dY_t = \left(b_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)\, dt + \sigma_t\, dW_t$$

dalla formula di Ito applicata alla funzione $y \to e^y$ ottengo:

$$d(e^{Y_t}) = \left(e^{Y_t}\left(b_t - \frac{\sigma_t^2}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{Y_t}\sigma_t^2\right)\, dt + e^{Y_t}\sigma_t\, dW_t$$

chiamiamo allora Z il processo definito da $Z_t = e^{Y_t}$, che ha differenziale stocastico:

$$dZ_t = Z_t b_t\, dt + \sigma_t Z_t\, dW_t$$

e prendiamo il processo $\tilde{Z}$ definito da $\tilde{Z}_t = X\ \forall t$, che ha differenziale stocastico uguale a zero. Allora:

$$\begin{aligned} d(XZ_t) &= Z_t\, dX + X\, dZ_t + g_t.0\, dt = \\ &= X\, dZ_t = XZ_t b_t\, dt + XZ_t\sigma_t\, dW_t \end{aligned}$$

Allora il processo $(XZ_t)_t$ soddisfa l'equazione (5.2), e quindi é soluzione.

Notiamo che la soluzione é tale che, se $X(\omega) \neq 0$, allora $X_t(\omega) \neq 0\ \forall t \in [s,T]$; in particolare, la soluzione mantiene lo stesso segno del dato iniziale.

Proviamo ora che la soluzione $(X_t)_t$ costruita sopra é unica nel caso in cui $X \neq 0$ **P**-q.c.. Supponiamo di avere un'altra soluzione $(\tilde{X}_t)_t$; allora costruiamo il processo $(Z_t)_t$ cosí definito:

$$Z_t = \frac{X_s}{X_t} = \frac{X}{X_t} = \exp\left(-\int_s^t \left(b_u - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right)\, du - \int_s^t \sigma_u\, dW_u\right)$$

allora:

$$\begin{aligned} dZ_t &= Z_t\left(-b_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}\sigma_t^2\right)\, dt - Z_t\sigma_t\, dW_t = \\ &= Z_t(-b_t + \sigma_t^2)\, dt - Z_t\sigma_t\, dW_t \end{aligned}$$

e calcoliamo il differenziale stocastico del processo $(\tilde{X}_t Z_t)_t$:

$$\begin{aligned} d(\tilde{X}_t Z_t) &= \tilde{X}_t\, dZ_t + Z_t\, d\tilde{X}_t - Z_t\sigma_t\tilde{X}_t\sigma_t\, dt = \\ &= \tilde{X}_t(Z_t(-b_t + \sigma_t^2)\, dt - Z_t\sigma_t\, dW_t) + Z_t(b_t\tilde{X}_t\, dt + \sigma_t\tilde{X}_t\, dW_t) - Z_t\tilde{X}_t\sigma_t^2\, dt = 0 \end{aligned}$$

allora $\tilde{X}_t Z_t = \tilde{X}_s Z_s \ \forall t$, cioé:

$$\tilde{X}_t \frac{X}{X_t} = \tilde{X}_s \frac{X}{X_s} = X\frac{X}{X} = X \ \forall t$$

cioé $\frac{X}{X_t} = X_t \ \forall t$, e quindi l'unica soluzione é quella esplicita da noi trovata.

Abbiamo provato il

Teorema 5.6 *: l'equazione differenziale stocastica (5.2) ammette come soluzione forte, unica in traiettorie, il processo dato da (5.3), le cui traiettorie mantengono lo stesso segno del dato iniziale.*

$\square$

Si puó provare in modo analogo il:

Teorema 5.7 *un sistema di equazioni del tipo:*

$$\begin{cases} dX_i(t) = X_i(t) b_i(t) \ dt + X_i(t) \sum_j \sigma_{ij}(t) \ dW_j(t) & \\ X_i(s) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbf{P}) & i = 1, ..., k \end{cases} \tag{5.4}$$

con $(b(t))_t \in \Lambda^1_W([0,T]; \mathbf{R}^k)$, $(\sigma(t))_t \in \Lambda^2_W([0,T]; \mathbf{R}^{k\times m})$ e $(W(t))_t$ moto browniano m-dimensionale, ammette un'unica soluzione forte, data da:

$$X_i(t) = X_i(s) \exp\left(\int_s^t \left(b_i(u) - \frac{1}{2} \sum_j \sigma_{ij}(u)^2 \right) \ du + \sum_j \int_s^t \sigma_{ij}(u) \ dW_j(u) \right) \tag{5.5}$$

$\square$

5.4 Processo di Ornstein - Uhlenbeck

Si dice **processo di Ornstein - Uhlenbeck** un processo che soddisfa l'equazione:

$$\begin{cases} dX_t = (aX_t + c) \ dt + \sigma dW_t \\ X_s = X \end{cases} \tag{5.6}$$

con $a, c, \sigma \in \mathbf{R}$. Stavolta l'equazione soddisfa le ipotesi (A), quindi esiste una soluzione ed é l'unica in $C_p(0,t)$. Vediamo di trovarla esplicitamente.

Poniamo $Y_t = X_t . f(t)$; allora:

$$\begin{aligned} dY_t &= f(t) \ dX_t + X_t \ d(f(t)) = \\ &= f(t)(aX_t + c) \ dt + f(t)\sigma \ dW_t + X_t f'(t) \ dt \end{aligned}$$

vogliamo eliminare X_t dall'espressione sopra; allora, se scelgo $f(t)$ tale che:

$$\begin{cases} af(t) + f'(t) = 0 \\ f(s) = 1 \end{cases}$$

cioé $f(t) = e^{-a(t-s)}$, allora abbiamo che:

$$dY_t = ce^{-a(t-s)}\ dt + \sigma e^{-a(t-s)}\ dW_t$$

cioé:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_s + \int_s^t ce^{-a(u-s)}\ du + \int_s^t \sigma e^{-a(u-s)}\ dW_u = \\ &= X - \frac{c}{a}\left(e^{-a(t-s)} - 1\right) + \sigma \int_s^t e^{-a(u-s)}\ dW_u \end{aligned}$$

allora la soluzione esplicita é:

$$\begin{aligned} X_t &= e^{a(t-s)} Y_t = \\ &= Xe^{a(t-s)} + \frac{c}{a}\left(e^{a(t-s)} - 1\right) + \sigma e^{at} \int_s^t e^{-au}\ dW_u \end{aligned}$$

Notiamo che $\int_s^t e^{-au}\ dW_u$ é un integrale stocastico di una funzione deterministica, quindi é una variabile aleatoria gaussiana. Allora, se il dato iniziale X é gaussiano, anche la soluzione X_t e' gaussiana $\forall t$, ed inoltre il processo$(X_t)_t$ é gaussiano, e quindi la legge del processo é univocamente determinata dalla sua media e dalla covarianza.

Calcoliamo ora media e covarianza delle soluzioni; prendo $t \in [s, T]$ e v tale che $t \leq v \leq T$; ricordando che un integrale stocastico della forma $\int_s^t f_u\ dW_u$ é una variabile aleatoria centrata ed é indipendente da $\mathcal{F}_s$, e quindi indipendente da X, abbiamo:

$$E[X_t] = e^{a(t-s)} E[X] + \frac{c}{a}(e^{a(t-s)} - 1) \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_v) &= Cov\left(Xe^{a(t-s)} + \sigma e^{at} \int_s^t e^{-au}\ dW_u, Xe^{a(v-s)} + \right. \\ &\quad \left. + \sigma e^{av} \int_s^v e^{-au}\ dW_u\right) = \\ &= e^{a(t+v-2s)} Var[X] + \\ &\quad + \sigma^2 e^{a(t+v)} Cov\left(\int_s^t e^{-au}\ dW_u, \int_s^v e^{-au}\ dW_u\right) = \\ &= e^{a(t+v-2s)} Var[X] + \sigma^2 e^{a(t+v)} Var\left[\int_s^t e^{-au}\ dW_u\right] = \\ &= e^{a(t+v-2s)} Var[X] + \sigma^2 e^{a(t+v)} \int_s^t |e^{-au}|^2\ du = \\ &= e^{a(t+v-2s)} Var[X] + \frac{\sigma^2}{2a} e^{a(t+v)} (e^{-2at} - e^{-2as}) \end{aligned}$$

In particolare, la varianza di X_t é uguale a:

$$\begin{aligned} Var[X_t] &= e^{2a(t-s)}Var[X] - \frac{\sigma^2}{2a}e^{2at}(e^{-2at} - e^{-2as}) = \\ &= e^{2a(t-s)}Var[X] + \frac{\sigma^2}{2a}(e^{2a(t-s)} - 1) \end{aligned}$$

Rimane cosí specificata sia la legge delle soluzioni, sia quella del processo delle soluzioni; abbiamo inoltre provato il seguente:

Teorema 5.8 *: l'equazione (5.6) ha la soluzione forte unica in traiettorie data dal processo:*

$$X_t = Xe^{a(t-s)} + \frac{c}{a}\left(e^{a(t-s)} - 1\right) + \sigma e^{at}\int_s^t e^{-au}\ dW_u \tag{5.8}$$

che é gaussiano, con media (5.7) e covarianza:

$$Cov(X_t, X_v) = e^{a(t+v-2s)}Var[X] + \frac{\sigma^2}{2a}e^{a(t+v)}(e^{-2at} - e^{-2as}) \tag{5.9}$$

□

Passiamo ora al caso n-dimensionale. Si dice **processo di Ornstein - Uhlenbeck n-dimensionale** un processo a valori in $\mathbf{R}^n$ che soddisfa l'equazione:

$$\begin{cases} dX_t = (AX_t + c)\ dt + \sigma dW_t \\ X_s = X \end{cases} \tag{5.10}$$

con $A \in M(n, n, \mathbf{R}), c \in \mathbf{R}^n, \sigma \in M(n, k, \mathbf{R}), (W_t)_t$ é un moto browniano k-dimensionale e $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbf{P}; \mathbf{R}^n)$. Anche stavolta l'equazione soddisfa le ipotesi (A), quindi esiste una soluzione ed é l'unica in $C_p([s,t])$.

Come nel caso unidimensionale, poniamo $Y_t = F(t).X_t$, dove peró $F(t)$ é una funzione di classe $C^1([s,t], M(n, n, \mathbf{R}))$ che soddisfa l'equazione:

$$\begin{cases} F(t).A + F'(t) = 0 \\ F(s) = I \end{cases}$$

Se definiamo l'**esponenziale di una matrice**:

$$e^{tA} = \sum_0^\infty {}_i\ \frac{(tA)^i}{i!}$$

allora e^{tA} gode delle seguenti proprietá:

1) é una funzione analitica da $\mathbf{R}$ in $M(n, n, \mathbf{R})$;
2) la sua derivata in t é $A.e^{tA} = e^{tA}.A$;
3) $e^{0A} = I$;

4) $e^{(t+s)A} = e^{tA}.e^{sA}$;
5) la matrice e^{tA} é invertibile qualunque siano t ed A, e la sua inversa é e^{-tA};
6) $(e^{tA})^* = e^{tA^*}$

Si puó facilmente verificare che $e^{-(t-s)A}$ é soluzione del sistema di sopra. Allora, calcolando il differenziale stocastico di Y_t componente per componente, abbiamo:

$$\begin{aligned} dY_t^i &= (F_i'(t).X_t + F_i(t).(AX_t + c))\ dt + F_i(t).\sigma\ dW_t = \\ &= F_i(t).c\ dt + F_i(t).\sigma\ dW_t \end{aligned}$$

cioé $dY_t = F(t).c\ dt + F(t).\sigma\ dW_t$, che ci dá la formula esplicita:

$$Y_t = Y_s + \int_s^t e^{-(u-s)A} c\ du + \int_s^t e^{-(u-s)A} \sigma\ dW_u$$

allora la soluzione esplicita dell'equazione é:

$$\begin{aligned} X_t &= e^{(t-s)A} Y_t = \\ &= e^{(t-s)A} X + e^{(t-s)A} \int_s^t e^{-(u-s)A} c\ du + e^{(t-s)A} \int_s^t e^{(u-s)A} \sigma\ dW_u = \\ &= e^{(t-s)A} X + e^{tA} \left(\int_s^t e^{-uA}\ du \right) c + e^{tA} \int_s^t e^{uA} \sigma\ dW_u \end{aligned}$$

Anche in questo caso, poiché $\int_s^t e^{-uA}\ dW_u$ é un integrale stocastico di una funzione deterministica, é una variabile aleatoria gaussiana n-dimensionale. Allora, se anche il dato iniziale X é una variabile aleatoria gaussiana n-dimensionale, anche la soluzione X_t e' gaussiana $\forall t$, ed inoltre il processo$(X_t)_t$ é gaussiano, e, come nel caso unidimensionale, la legge del processo delle soluzioni é univocamente determinata dalla media e dalla covarianza.

Calcoliamo ora media e covarianza delle soluzioni; prendo $t \in [s, T]$ e v tale che $t \le v \le T$; grazie agli stessi accorgimenti usati in dimensione 1 ho:

$$E[X_t] = e^{(t-s)A} E[X] + e^{tA} \left(\int_s^t e^{-uA}\ du \right) c \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_v) &= Cov\Big(e^{(t-s)A} X + e^{tA} \int_s^t e^{-uA} \sigma\ dW_u, e^{(v-s)A} X + \\ &\quad + e^{vA} \int_s^v e^{-uA} \sigma\ dW_u \Big) = \\ &= Cov(e^{(t-s)A} X, e^{(v-s)A} X) + \\ &\quad + Cov\left(e^{tA} \int_s^t e^{-uA} \sigma\ dW_u, e^{vA} \int_s^v e^{-uA} \sigma\ dW_u \right) \end{aligned}$$

Ricordando che $Q = Cov(X, Y)$ significa che

$$< Qx, y >= Cov(< X, x >< Y, y >)$$

allora, se $A, B \in M(n,n,\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} Cov(<AX,x><BY,y>) &= Cov(<X,A^*x><Y,B^*y>) = \\ &= <QA^*x,B^*y>=<BQA^*x,y> \end{aligned}$$

cioé $Cov(AX,BY) = B.Q.A^*$; allora:

$$Cov(e^{(t-s)A}X, e^{(v-s)A}X) = e^{(v-s)A}Cov(X,X)e^{(t-s)A^*}$$

$$Cov\left(e^{tA}\int_s^t e^{-uA}\sigma\ dW_u \quad , \quad e^{vA}\int_s^v e^{-uA}\sigma\ dW_u\right) =$$

$$\begin{aligned} e^{vA}Cov\left(\int_s^t e^{-uA}\sigma\ dW_u, \int_s^t e^{-uA}\sigma\ dW_u\right) e^{tA^*} = \\ = e^{vA}\left(\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}\ du\right) e^{tA^*} \end{aligned}$$

e infine:

$$Cov(X_t, X_v) = e^{(v-s)A}Cov(X,X)e^{(t-s)A^*} + e^{vA}\left(\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}\ du\right) e^{tA^*} \tag{5.12}$$

In particolare, la covarianza di X_t é uguale a:

$$Cov(X_t, X_t) = e^{(t-s)A}Cov(X,X)e^{(t-s)A^*} + e^{tA}\left(\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}\ du\right) e^{tA^*}$$

Anche ora rimangono specificate sia la legge delle soluzioni, sia la legge del processo, e abbiamo dimostrato il:

Teorema 5.9 *: l'equazione (5.10) ammette la soluzione forte, unica in legge, data dal processo definito da:*

$$X_t = e^{(t-s)A}X + e^{tA}\left(\int_s^t e^{-uA}\ du\right) c + e^{tA}\int_s^t e^{uA}\sigma\ dW_u \tag{5.13}$$

che é gaussiano, con media data da (5.11) e covarianza data da (5.12).

□

Vediamo ora se riusciamo a trovare delle condizioni sul dato iniziale e sui coefficienti affinché il processo delle soluzioni sia stazionario, cioé la sua legge sia invariante per traslazioni temporali. Siccome il processo delle soluzioni é gaussiano, la sua legge é determinata univocamente dalla sua media e dalla sua covarianza. Se queste sono invarianti per traslazioni temporali, allora il processo sará stazionario.

Notiamo che sia media che covarianza sono funzioni analitiche di t e di v, quindi derivabili; allora, per imporre la non dipendenza da t, occorre e basta imporre le due condizioni:

$$\frac{\partial}{\partial t}E[X_t]=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Cov(X_t,X_{t+h})=0$$

La prima condizione ci dá:

$$Ae^{(t-s)A}E[X]+Ae^{tA}\left(\int_s^t e^{-uA}c\ du\right)+e^{tA}e^{-tA}c=0$$

$$Ae^{-sA}E[X]=-A\int_s^t e^{-uA}c\ du-e^{-tA}c=[e^{-uA}]_s^t-e^{-tA}c=-e^{-sA}c$$

$$AE[X]=-c$$

e questa é la prima condizione. Vediamo la seconda; chiamiamo per brevitá $Q=Cov(X,X)$ abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{(t+h-s)A}Qe^{(t-s)A^*}+e^{(t+h)A}\left(\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^*e^{-uA^*}\ du\right)e^{tA^*}\right)=0$$

$$\begin{aligned}
Ae^{(t+h-s)A}Qe^{(t-s)A^*}+e^{(t+h-s)A}Qe^{(t-s)A^*}A^* &+ Ae^{(t+h)A}\left(\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^*e^{-uA^*}\ du\right)e^{tA^*}+\\
&+ e^{(t+h)A}e^{-uA}\sigma\sigma^*e^{-uA^*}e^{tA^*}+\\
&+ e^{(t+h)A}\left(\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^*e^{-uA^*}\ du\right)e^{tA^*}A^*=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ae^{(h-s)A}Qe^{-sA^*}+e^{(h-s)A}Qe^{-sA^*}A^* &= -Ae^{hA}\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^*e^{-uA^*}\ du-e^{hA}e^{-tA}\sigma\sigma^*e^{-tA^*}-\\
&\quad -e^{hA}\int_s^t e^{-uA}\sigma\sigma^*e^{-uA^*}\ duA^*=\\
&= -e^{hA}e^{-tA}\sigma\sigma^*e^{-tA^*}-e^{hA}\int_s^t\Big(Ae^{-uA}\sigma\sigma^*e^{-uA^*}+\\
&\quad +e^{-uA}\sigma\sigma^*e^{-uA^*}A^*\Big)\ du=\\
&= -e^{hA}e^{-tA}\sigma\sigma^*e^{-tA^*}-e^{hA}[e^{-uA}\sigma\sigma^*e^{-uA^*}]_s^t=\\
&= -e^{hA}e^{-sA}\sigma\sigma^*e^{-sA^*}
\end{aligned}$$

Da questo si ricava:

$$AQ+QA+\sigma\sigma^*=0$$

Le due condizioni trovate su media e covarianza del dato iniziale X sono allora necessarie e sufficienti affinché il processo delle soluzioni $(X_t)_t$ sia stazionario. Abbiamo allora dimostrato il seguente

Teorema 5.10 : *condizione necessaria e sufficiente affinché $(X_t)_t$ sia stazionario é che il dato iniziale X sia di legge $N(m, Q)$ tale che:*

$$\begin{cases} Am = -c \\ AQ + QA + \sigma\sigma^* = 0 \end{cases}$$

□

Sorgono ora due problemi:

1) esistono m e Q con queste caratteristiche?

2) se esistono, c'é un modo diretto per trovarli?

C'é un modo classico per risolvere questi due problemi, che peró richiede come ipotesi aggiuntiva che $\lim_{s\to-\infty} e^{sA} = 0$; questo implica che $\exists M > 0, \lambda > 0$ tali che $|e^{tA}| \leq Me^{-\lambda t}$ (ció succede, ad esempio, se lo spettro di A é composto solo da autovalori con parte reale negativa). L'idea é quella di far tendere l'istante iniziale s a $-\infty$; allora, se chiamo $(X_t^{s,X})_t$ il processo ottenuto come soluzione dell'equazione con condizione iniziale $X_s = X$, il processo $\overline{X}_t = \lim_{s\to-\infty} X_t^{s,X}$ é un buon candidato ad essere il processo stazionario cercato.

C'é un problema tecnico: come definire l'integrale stocastico con un estremo di integrazione negativo? Per risolverlo, costruiamo il seguente processo $(Z_t)_t$, che chiameremo **moto browniano esteso**, o **moto browniano bilaterale**.

Consideriamo due moti browniani $(W_t)_t$ e $(W'_t)_t$ indipendenti ed adattati rispettivamente alle filtrazioni $(\mathcal{F}_t)_t$ e $(\mathcal{F}'_t)_t$, e definisco Z_t in questo modo:

$$Z_t = \begin{cases} W_t & \text{se } t \geq 0 \\ W'_{-t} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Consideriamo inoltre la filtrazione $(\mathcal{G}_t)_t$ cosí costruita:

$$\mathcal{G}_t = \cup_{u\leq s\leq t}\sigma(Z_s - Z_u) \cup \{A \in \mathcal{F} | \mathbf{P}(A) = 0 \text{ o } \mathbf{P}(A) = 1\}$$

Lemma 5.11 : *il processo $(Z_t)_t$ gode delle seguenti proprietá:*

1) $Z_0 = 0$ q.c.
2) se $t > s$, $Z_t - Z_s$ é $\mathcal{G}_t$-misurabile
3) se $t > s$, $Z_t - Z_s$ é indipendente da $\mathcal{G}_s$
4) se $t > s$, $Z_t - Z_s$ ha legge $N(0, t-s)$

Dimostrazione: 1) $Z_0 = W_0 = 0$ q.c.

2) ovvio per come abbiamo costruito $\mathcal{G}_s$

3) se $0 \leq s < t$, la tesi é banale; supponiamo che $s < t \leq 0$; allora $Z_t - Z_s = -(W'_{-s} - W'_{-t})$ é $\mathcal{F}'_s-$misurabile, e quindi é indipendente da ogni variabile aleatoria della

forma $W'_{-u} - W'_{-v}$, con $u < v \leq s$, cioé da ogni $Z_u - Z_v$, e quindi é indipendente da $\mathcal{G}_s$; infine, se $s < 0 < t$, ho:

$$Z_t - Z_s = W_t - W'_{-s} = (W_t - W_0) + (W'_0 - W'_{-s})$$

il primo addendo é indipendente da $\mathcal{G}_s$, perché $\mathcal{G}_s$ é generato solo da variabili del processo $(W'_t)_t$, ed il secondo é indipendente da $\mathcal{G}_s$ per quanto dimostrato prima.

4) se $0 \leq s < t$, la tesi é banale; supponiamo che $s < t \leq 0$; allora $Z_t - Z_s = -(W'_{-s} - W'_{-t})$ ha legge $N(0, -s+t)$; supponiamo infine che $s < 0 < t$; allora:

$$Z_t - Z_s = (W_t - W_0) + (W'_0 - W'_{-s})$$

il primo addendo ha legge $N(0,t)$, il secondo ha legge $N(0,s)$ e sono indipendenti.

$\square$

Queste sono le quattro proprietá formali da cui si costruisce la teoria dell'integrazione stocastica fin qui usata. Inoltre notiamo che $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$. Possiamo quindi costruire un integrale stocastico rispetto al processo $(Z_t)_t$, con le stesse proprietá dell'integrale costruito rispetto ad un moto browniano, puntualizzando peró che, se $X \in \Lambda^2_Z([s,t])$, allora $\int_s^t X_u \, dZ_u$ é $\mathcal{G}_t$-misurabile.

Controlliamo ora se la nostra idea funziona. Scriviamo la soluzione dell'equazione di Ornstein - Uhlenbeck sostituendo $(Z_t)_t$ a $(W_t)_t$:

$$X_t^{s,X} = e^{(t-s)A}X + e^{tA}\int_s^t e^{-uA}c \; du + e^{tA}\int_s^t e^{-uA}\sigma \; dZ_u$$

e calcoliamone il limite per $s \to -\infty$, facendo l'ipotesi che $\lim_{s\to-\infty} e^{-sA} = 0$; sotto questa ipotesi, i due integrali convergono (rispettivamente, il primo uniformemente ed il secondo in L^2), e possiamo definire il processo $(\overline{X}_t)_t$ in questo modo:

$$\overline{X}_t = \lim_{s\to-\infty} X_t^{s,X} = e^{tA}\int_{-\infty}^t e^{-uA}c \; du + e^{tA}\int_{-\infty}^t e^{-uA}\sigma \; dZ_u$$

Notiamo che $(\overline{X}_t)_t$ non dipende dal dato iniziale X.

Ci sono ora due cose da verificare:

1) $(\overline{X}_t)_t$ risolve l'equazione di Ornstein-Ulhenbeck, con qualsiasi istante iniziale.

2) $(\overline{X}_t)_t$ é stazionario.

Verifichiamo il punto (1); supponiamo di volere 0 come istante iniziale; allora $\forall t > 0$ ho:

$$\begin{aligned}
\overline{X}_t &= e^{tA}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-uA}c\ du + \int_{0}^{t} e^{-uA}c\ du + \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\ dZ_u + \int_{0}^{t} e^{-uA}\sigma\ dZ_u\right) = \\
&= e^{tA}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-uA}c\ du + \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\ dZ_u\right) + e^{tA}\int_{0}^{t} e^{-uA}c\ du + e^{tA}\int_{0}^{t} e^{-uA}\sigma\ dW_u
\end{aligned}$$

quindi $(\overline{X}_t)_t$ é soluzione dell'equazione di Ornstein - Ulhenbeck con dato iniziale:

$$\overline{X}_0 = \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}c\ du + \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\ dZ_u$$

Per controllare se $(\overline{X}_t)_t$ é stazionario, occorre e basta verificare che media e covarianza del dato iniziale:

$$m = E[\overline{X}_0] = \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}c\ du$$

$$\begin{aligned}
Q &= Cov(\overline{X}_0, \overline{X}_0) = Cov(\int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\ dZ_u, \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\ dZ_u) = \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}\ du
\end{aligned}$$

soddisfano le condizioni:

$$\begin{cases} Am + c = 0 \\ AQ + QA^* + \sigma\sigma^* = 0 \end{cases}$$

controlliamo:

$$\begin{aligned}
A\int_{-\infty}^{0} e^{-uA}c\ du + c &= \int_{-\infty}^{0} Ae^{-uA}c\ du + c = [-e^{-uA}]_{-\infty}^{0}c + c = \\
&= -Ic + c = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}\ du &+ \int_{-\infty}^{0} e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}\ duA^* + \sigma\sigma^* = \\
&= \int_{-\infty}^{0} (Ae^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*} + e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}A^*)\ du + \sigma\sigma^* = \\
&= [-e^{-uA}\sigma\sigma^* e^{-uA^*}]_{-\infty}^{0} + \sigma\sigma^* = \\
&= -\sigma\sigma^* + \sigma\sigma^* = 0
\end{aligned}$$

Abbiamo cosí dimostrato il:

Teorema 5.12 : *il processo* $(\overline{X}_t)_t$ *definito da:*

$$\overline{X}_t = e^{tA} \int_{-\infty}^{t} e^{-uA} c \, du + e^{tA} \int_{-\infty}^{t} e^{-uA} \sigma \, dZ_u$$

é soluzione stazionaria dell'equazione di Ornstein - Uhlenbeck (5.10).

□

5.5 Legge delle soluzioni di una equazione differenziale stocastica

Se abbiamo l'equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_s = X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbf{P}) \end{cases} \tag{5.14}$$

e supponiamo che esista una soluzione unica in traiettorie (questo succede se ad esempio siamo nelle ipotesi (A)); chiamiamo $X_t^{s,x}$ la soluzione di questa equazione, parametrizzata, oltre che rispetto al tempo t, anche rispetto al punto iniziale x ed all'istante iniziale s.

Ci poniamo ora il problema di calcolare la legge del processo $(X_t^{s,x})_t$, che verrá chiamata **legge del processo delle soluzioni** dell'equazione (5.14); la legge marginale della variabile aleatoria $X_t^{s,x}$ verrá chiamata **legge della soluzione in** t e indicata con il simbolo $\mathcal{L}(X_t^{s,x})$. Abbiamo visto che, nel caso dell'equazione di Ornstein - Uhlenbeck, calcolare la legge del processo era molto facile. Vediamo cosa succede nel caso generale.

Definiamo le classi:

$$B_b(\mathbf{R}^n) = \{\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \mid \phi \text{ misurabile e limitata}\}$$
$$C_b(\mathbf{R}^n) = \{\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \mid \phi \text{ continua e limitata}\}$$
$$M^+(\mathbf{R}^n) = \{\mu \mid \mu \text{ misura positiva su } (\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))\}$$
$$M_1^+(\mathbf{R}^n) = \{\mu \mid \mu \text{ misura di probabilità su } (\mathbf{R}^n, \mathcal{B}(\mathbf{R}^n))\}$$

e gli operatori $P_{s,t} : B_b(\mathbf{R}^n) \to B_b(\mathbf{R}^n)$ definiti in modo che $\forall \phi \in B_b(\mathbf{R}^n), \forall x \in \mathbf{R}^n$:

$$(P_{s,t}\phi)(x) = E[\phi(X_t^{s,x})]$$

Notiamo che $P_{s,t}$ é lineare e vale il seguente:

Lemma 5.13 : $P_{s,t} : C_b(\mathbf{R}^n) \to C_b(\mathbf{R}^n)$ *ed é continua.*

Dimostrazione: la dimostrazione che, se $\phi \in C_b(\mathbf{R}^n)$, allora $P_{s,t}\phi \in C(\mathbf{R}^n)$ sfrutta il teorema (5.5) sulla dipendenza continua dai dati; verifichiamo che $P_{s,t}$ é limitato: se $\|\phi\|_{C^0} \leq K$, allora:

$$\|P_{s,t}\phi\|_{C^0} = \|E[\phi(X_t^{s,X})]\|_{C^0} \leq E[K] = K$$

e quindi, in particolare, $\|P_{s,t}\|_{L(C^0,C^0)} \leq 1$ e $P_{s,t}\phi \in C_b(\mathbf{R}^n)$.

□

Definiamo poi il nucleo $P : [0,T] \times [0,T] \times \mathbf{R}^n \times \mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ tale che, $\forall s < t \in [0,T], x \in \mathbf{R}^n, B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$:

$$P(s,t,x,B) = P_{s,t}\mathbf{1}_B(x) = E[\mathbf{1}_B(X_t^{s,x})] = \mathcal{L}(X_t^{s,x})(B)$$

Definiamo infine $P^*_{s,t} : M_1^+ \to M_1^+$ tale che $\forall \mu \in M_1^+, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$:

$$(P^*_{s,t}\mu)(B) = \int_{\mathbf{R}^n} P(s,t,x,B)\ d\mu(x)$$

se definiamo l'accoppiamento di dualitá tra $B_b(\mathbf{R}^n)$ e $M_1^+(\mathbf{R}^n)$:

$$< \phi, \mu >= \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x)\ d\mu(x)$$

allora abbiamo il:

Lemma 5.14 *: $\forall \phi \in B_b(\mathbf{R}^n), \forall \mu \in M_1^+(\mathbf{R}^n)$:*

$$< P_{s,t}\phi, \mu >=< \phi, P^*_{s,t}\mu >$$

Dimostrazione: verifichiamo che la relazione vale $\forall \mathbf{1}_B, B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$:

$$\begin{aligned} < P_{s,t}\mathbf{1}_B, \mu > &= \int_{\mathbf{R}^n} P_{s,t}\mathbf{1}_B(x)\ d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}^n} P(s,t,x,B)\ d\mu(x) = \\ &= (P^*_{s,t})(B) =< \mathbf{1}_B, P^*_{s,t} > \end{aligned}$$

siccome le indicatrici sono dense in $B_b(\mathbf{R}^n)$, la relazione é vera $\forall \phi \in B_b(\mathbf{R}^n)$.

□

Vediamo ora che gli operatori appena definiti danno una utile espressione della legge delle soluzioni:

Proposizione 5.15 *: se $\mathcal{L}(X) = \nu$, allora $P^*_{s,t}\nu = \mathcal{L}(X_t^{s,X})$, e $P^*_{s,t}\delta_x = \mathcal{L}(X_t^{s,x})$*

Dimostrazione: $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X_t^{s,X})(B) &= \mathbf{P}\{X_t^{s,X} \in B\} = E[\mathbf{1}_B(X_t^{s,X})] = \int_{\mathbf{R}^n} P_{s,t}\mathbf{1}_B(x)\ d\nu(x) = \\ &= < P_{s,t}\mathbf{1}_B, \nu >=< \mathbf{1}_B, P_{s,t}^*\nu >= (P_{s,t}^*\nu)(B)\end{aligned}$$

se $\mathcal{L}(X) = \delta_x$, allora $P_{s,t}^*\delta_x = \mathcal{L}(X_t^{s,X}) = \mathcal{L}(X_t^{s,x})$

□

Corollario 5.16 *:* $P_{s,u}^* = P_{t,u}^* \circ P_{s,t}^*$; $P_{s,u} = P_{s,t} \circ P_{t,u}$

Dimostrazione: se poniamo $\mathcal{L}(X) = \nu$, allora $P_{t,u}^* \circ P_{s,t}^*\nu = \mathcal{L}(X_u^{t,X_t^{s,X}})$; questo equivale a trovare la legge dell'equazione con dato iniziale $X_t^{s,X}$ ed istante iniziale t; questa, all'istante u, ha la stessa soluzione di $X_u^{s,X}$, e quindi abbiamo che $\mathcal{L}(X_u^{s,X}) = P_{t+s}^*\nu$.

La seconda relazione si ricava banalmente dalla prima e dalla relazione di dualitá.

□

5.6 Equazioni alle derivate parziali legate ad una equazione differenziale stocastica

Ci mettiamo ora nelle ipotesi in cui i coefficienti di drift e di diffusione siano descritti da funzioni deterministiche $b \in C^1(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$ e $\sigma \in C^2(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}^{n\times k})$, e vogliamo trovare delle equazioni alle derivate parziali che descrivano la legge.

Calcoliamo ora la quantitá

$$u(t, s, x) = E[\phi(X_t^{s,x})]$$

per una $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, poiché questo basta ad identificare la legge. Notiamo innanzitutto che questa espressione é uguale a:

$$E[\phi(X_{s,x}^t)] = \int_{\mathbf{R}^n} \phi(X_{s,x}^t)\ d\mathbf{P} = P_{s,t}\phi(x)$$

dove $P_{s,t}$ é la probabilitá di transizione delle soluzioni costruita precedentemente. Vale allora il seguente

Teorema 5.17 *: nelle ipotesi precedentemente fatte, $u(t, s, x)$ soddisfa la seguente equazione, detta* **equazione backward***:*

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}u(t, s, x) + L_s u(t, s, x) = 0 \\ u(t, t, x) = \phi(x) \end{cases} \tag{5.15}$$

dove $L_s : C_b^2 \to C^0$ *é definita, per* $\phi \in C^2$, *da:*

$$L_s\phi(x) = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi(x)(\sigma.^t\sigma)_{ij} + \vec{\nabla}\phi(x)b(s,x)$$

Dimostrazione: per la formula di Ito abbiamo:

$$\begin{aligned} d\phi(X_t) &= \vec{\nabla}\phi(X_t)dX_t + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi(X_t)(\sigma.^t\sigma)_{ij}\ dt = \\ &= (\vec{\nabla}\phi(X_t)b(t,X_t) + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi(X_t)(\sigma.^t\sigma)_{ij})dt + \\ &\quad +\vec{\nabla}\phi(X_t)\sigma(t,X_t)dW_t \end{aligned}$$

Allora abbiamo:

$$\begin{aligned} \phi(X_t) - \phi(X_s) &= \int_s^t (\vec{\nabla}\phi(X_u)b(u,X_u) + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi(X_u)(\sigma.^t\sigma)_{ij})\ du + \\ &\quad + \int_s^t \vec{\nabla}\phi(X_u)\sigma(u,X_u)\ dW_u \end{aligned}$$

Calcoliamo la speranza di questa quantitá, ricordando che l'integrale stocastico é una variabile aleatoria centrata:

$$\begin{aligned} E[\phi(X_t)] &- E[\phi(X_s)] = \\ &= E\left[\int_s^t \left(\vec{\nabla}\phi(X_u)b(u,X_u) + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi(X_u)(\sigma.^t\sigma)_{ij}\right)\ du\right] \end{aligned}$$

che, introducendo il nucleo $P_{s,t}$ diventa:

$$P_{s,t}\phi(x) - \phi(x) = \int_s^t P_{s,u}L_u\phi(x)\ du$$

Allora abbiamo che:

$$\frac{1}{h}(P_{s-h,s}\phi(x) - \phi(x)) = \frac{1}{h}\int_{s-h}^s P_{s-h,u}L_u\phi(x)\ du$$

cioé

$$\frac{1}{h}(u(s,s-h,x) - u(s,s,x)) = \frac{1}{h}\int_{s-h}^s P_{s-h,u}L_u\phi(x)\ du$$

Siccome l'operatore $P_{s,t}$ é continuo da C^0 in sé, allora abbiamo che:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(P_{s-h,s}\phi(x) - \phi(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(u(s,s-h,x) - u(s,s,x)) = -L_s\phi(x)$$

Calcoliamo ora la derivata sinistra di $u(t,s,x)$ rispetto ad s:

$$\begin{aligned}
D_{s-}u(t,s,x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(u(t,s-h,x)-u(t,s,x)) = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(P_{s-h,t}\phi(x)-P_{s,t}\phi(x)) \\
&= \lim \frac{1}{h}(P_{s-h,s}(P_{s,t}\phi(x))-(P_{s,t}\phi(x))) \\
&= -L_sP_{s,t}\phi(x) = -L_su(t,s,x)
\end{aligned}$$

che é una funzione continua, quindi abbiamo:

$$\frac{d}{ds}u(t,s,x)+L_su(t,s,x)=0$$

e la condizione iniziale si ottiene banalmente. Abbiamo quindi la tesi.

□

Partiamo ora dal sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}u(t,s,x)+L_su(t,s,x)=0 \\ u(t,t,x)=\phi(x) \end{cases} \tag{5.16}$$

e consideriamo $v(s,x)$ che sia soluzione (in senso distribuzionale) di

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}v(s,x)=L_s^*v(s,x) \\ v(0,x)=\delta_y \end{cases}$$

dove δ_y é la distribuzione delta di Dirac, e L_s^* é l'operatore aggiunto di L_s (rispetto all'accoppiamento dualitá C^∞ - distribuzioni); allora, se abbiamo $f\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, e una distribuzione g individuabile con una funzione di classe $C^2(\mathbf{R}^n)$, allora:

$$< L_sf,g >=< f,L_s^*g >$$

Esplicitamente, per L_s^* abbiamo l'espressione:

$$L_s^*\phi(x)=\frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}(\phi(x)(\sigma.{}^t\sigma)_{ij})-\sum\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi(x)b(s,x))$$

Allora abbiamo:

$$\frac{d}{ds}\int_{\mathbf{R}^n}u(t,s,x)v(s,x)\,dx=\int_{\mathbf{R}^n}(u(t,s,x)L_s^*v(s,x)-L_su(t,s,x)v(s,x))\,dx=0$$

cioé la quantitá $\int_{\mathbf{R}^n}u(t,s,x)v(s,x)\,dx$ é costante in s per $s=0$ e per $s=t$:

$$\int_{\mathbf{R}^n} u(t,t,x)v(t,x)\ dx = \int_{\mathbf{R}^n} u(t,0,x)v(0,x)\ dx$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \phi(x)v(t,x)\ dx = u(t,0,y) = E[\phi(X_{t_0},y)] = \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x)p(s,t,y,dx)$$

dove $p(s,t,y,dx)$ é la legge della soluzione $X_t^{s,x}$ data dal nucleo di transizione p. Siccome questa relazione vale $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, che é denso in $C^0(\mathbf{R}^n)$; allora abbiamo:

$$v(t,x)\ dx = p(s,t,y,dx)$$

che lega la soluzione $v(t,x)$ dell'equazione di sopra con la legge delle soluzioni. L'equazione (5.16) é chiamata **equazione di Fokker - Planck**, o anche **equazione forward di Kolmogorov**.

Capitolo 6

Processi di Ornstein - Uhlenbeck a valori in spazi di Hilbert

Da questo momento in poi assumeremo sempre che H sia uno spazio di Hilbert separabile reale, dotato del prodotto scalare $< .,. >_H$, che induce la norma $\|.\|_H$. Con il simbolo $L(H,H)$ indichiamo lo spazio vettoriale degli operatori lineari e continui da H in sé; questo é uno spazio normato con la norma:

$$\|A\|_{L(H,H)} = \sup\{\|Ax\|_H \mid x \in H, \|x\| = 1\}$$

6.1 Semigruppi di operatori lineari

Diciamo che $\{S_t\}_{t\geq 0}$ é un **semigruppo di operatori lineari e continui**, o semplicemente un **semigruppo**, se gode delle seguenti proprietá:

1) $S_t \in L(H,H)\ \forall t \geq 0$
2) $S_0 = I$
3) $S_{t+s} = S_t \circ S_s$

diciamo che il semigruppo $\{S_t\}_{t\geq 0}$ é **fortemente continuo** se verifica anche la proprietá:

4) $\forall x \in H : \lim_{t\to 0^+} S_t x = x$

questa condizione si esprime anche dicendo che la successione $\{S_t\}_{t\geq 0}$ **converge fortemente** a I per $t \to 0^+$. La convergenza forte é piú debole della convergenza in norma in $L(H,H)$.

Definiamo ora il seguente sottospazio vettoriale di H:

$$D = D(A) = \left\{ x \in H \;\middle|\; \exists \lim_{t\to 0^+} \frac{S_t x - x}{t} \right\}$$

e definiamo l'operatore lineare A su $D(A)$:

$$\forall x \in D(A) : Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{S_t x - x}{t}$$

D viene chiamato spesso **dominio** di A, e A viene detto **generatore infinitesimale** del semigruppo $\{S_t\}_{t \geq 0}$. L'espressione che definisce di A puó essere anche scritta in questo modo: se $x \in D(A)$, allora $D^+ S_t x|_{t=0^+} = Ax$.

Esempio 6.1 *: se $H = \mathbf{R}^n$, e $A \in M(n, n, \mathbf{R})$, allora A é generatore infinitesimale del semigruppo definito da:*

$$S_t = e^{tA} = \sum_0^\infty {}_i \frac{(tA)^i}{i!}$$

□

Teorema 6.2 *: se $\{S_t\}_{t \geq 0}$ é un semigruppo fortemente continuo, allora esistono due costanti reali M, λ tali che:*

$$\|S_t\|_{L(H,H)} \leq Me^{\lambda t}$$

Per una dimostrazione vedere Pazy[1], pag. 4.

□

Teorema 6.3 *: se $A : D(A) \to H$ é il generatore infinitesimale di $\{S_t\}_{t \geq 0}$, allora D é denso in H, A é chiuso e si ha che:*

$$\forall x \in D(A) : S_t x \in D(A) \text{ e } \forall t \geq 0 : \frac{dS_t x}{dt} = AS_t x = S_t Ax$$

Dimostrazione: per una dimostrazione che D é denso in H e A é chiuso, vedi Pazy[1]; proviamo ora la seconda parte. $\forall x \in D(A) : S_t x \in D(A)$. Se $x \in D(A)$, allora, siccome $S_t \in L(H, H)\ \forall t > 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{S_{t+h} x - S_t x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{S_t S_h x - S_t x}{h} = \lim_{h \to 0} S_t \frac{S_h x - x}{h} = S_t \lim_{h \to 0} \frac{S_h x - x}{h} = S_t Ax$$

che prova contemporaneamente che $\forall x \in D(A) : S_t x \in D(A)$ e che $\frac{dS_t x}{dt} = S_t Ax$. Inoltre:

$$\frac{dS_t x}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{S_{t+h} x - S_t x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{S_h S_t x - S_t x}{h} = AS_t x$$

che completa la dimostrazione.

$\square$

Corollario 6.4 : *$v(t) = S_t x$ é soluzione dell'equazione differenziale ordinaria a valori in H:*

$$\begin{cases} v' = Av \\ v(0) = x \end{cases}$$

6.2 Integrale di Bochner

Ci proponiamo ora di studiare un'equaazione differenziale ordinaria a valori in H di un tipo leggermente piú generale di quella del corollario (6.4).

Per farlo ci serve uno strumento, chiamato integrale di Bochner.

Supponiamo di avere uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, e una variabile aleatoria $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (H, \mathcal{H})$. Allora X si dice **integrabile secondo Bochner** se:

$$\int_\Omega \|X\|_H \, d\mathbf{P} < +\infty$$

Se X é integrabile secondo Bochner, puó essere determinato univocamente un elemento $E[X]$ in H, corrispondente alla **speranza** di X, chiamato **integrale di Bochner**, che viene costruito, esattamente come l'integrale di una variabile aleatoria reale, prima sulle indicatrici ed esteso poi per convergenza monotona (vedere Da Prato - Zabczyk[1], pagg.19 - 20). Analogamente, se prendiamo $\Omega = [0,T]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,T])$ e come $\mathbf{P}$ la misura di Lebesgue su $[0,T]$, possiamo dire che $f : [0,T] \to H$ é integrabile secondo Bochner se $\int_{[0,T]} \|f(t)\|_H \, dt < +\infty$, e indicare il suo integrale di Bochner con $\int_{[0,T]} f(t) \, dt$.

Prendiamo ora $f : [0,T] \to H$, e studiamo l'equazione:

$$\begin{cases} u' = Au + f \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Se $u_0 \in D(A)$ e f é a valori in $D(A)$ e tale che la funzione $s \to S_{t-s} f(s)$ é integrabile secondo Bochner, allora la soluzione del sistema di sopra é:

$$u(t) = S_t u_0 + \int_0^t S_{t-s} f(s) \, ds$$

infatti:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= AS_t u_0 + S_{t-t} f(t) + \int_0^t AS_{t-s} f(s) \, ds = \\ &= AS_t u_0 + A \int_0^t S_{t-s} f(s) \, ds + f(t) = Au + f \end{aligned}$$

Se $f : [0,T] \in H$ e $u_0 \in H$, allora l'espressione di sopra, che rimane ben definita, si dice **soluzione mild**.

6.3 Processi di Ornstein - Uhlenbeck a valori in spazi di Hilbert

Ci proponiamo ora di studiare un'equazione stocastica particolare, chiamata **equazione di Ornstein - Uhlenbeck a valori in uno spazio di Hilbert**, nel caso particolare che sia governata da un moto browniano unidimensionale. Per fare questo, abbiamo bisogno di definire l'integrale stocastico rispetto ad un moto browniano unidimensionale di una funzione deterministica a valori in uno spazio di Hilbert.

Prendiamo una funzione $f : [0,T] \to H$ tale che $\int_{[0,T]} f^2(t)\ dt < +\infty$; f si dice **semplice** se é della forma:

$$f(t) = \sum_i f_i.\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}$$

Definiamo allora l'integrale stocastico di queste funzioni rispetto al moto browniano standard $(W_t)_t$ in questo modo:

$$I(f) = \int_{[0,T]} f(t)\ dW_t = \sum_i f_i.(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Allora, possiamo costruire, come nel caso k-dimensionale, una isometria che estenda questa applicazione alle funzioni tali che $\int_{[0,T]} f^2(t)\ dt < +\infty$, chiamata **integrale stocastico** a valori nello spazio di Hilbert H. Si puó provare che essa gode delle proprietá:

1) $E[I(f)] = 0$ e

$$Cov(I(f), I(g)) = \int_{[0,T]} f(t) \otimes g(t)\ dt = \left(\int_{[0,T]} f(t)\ dt\right) \otimes \left(\int_{[0,T]} g(t)\ dt\right)$$

2) $I(f)$ é una variabile aleatoria gaussiana a valori in H

3) se f é derivabile, allora vale la seguente formula:

$$\int_0^T f(t)\ dW_t = [f(t)W_t]_0^T + \int_0^T W_t \frac{d}{dt} f(t)\ dt$$

Possiamo definire l'integrale stocastico dipendente dal parametro di integrazione in modo analogo al caso in dimensione finita in questo modo:

$$I_t(f) = I(f.\mathbf{1}_{[0,t)})$$

Consideriamo ora l'equazione stocastica a valori in H:

$$\begin{cases} du_t = (Au_t + c)\ dt + \sigma\ dW_t \\ u_0 \end{cases} \tag{6.1}$$

dove c é integrabile secondo Bochner, $\sigma \in H$, $u_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_/, \mathbf{P}; H)$, $(W_t)_t$ é un moto browniano reale $A : D(A) \to H$ é il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo.

Quanto diremo in questo paragrafo é estendibile quasi immediatamente al caso di un moto browniano $n-$dimensionale, e con relativamente poca fatica al caso di un moto browniano a valori in uno spazio di Hilbert U (che puó essere lo stesso spazio H, o un altro). Siccome l'applicazione che tratteremo nel capitolo sul modello di tassi di interesse di Musiela richiede solo un moto browniano unidimensionale, ci limiteremo a questo caso per brevitá.

Ricordiamo che la soluzione di un'equazione di Ornstein - Uhlenbeck in $\mathbf{R}^n$ era data da un'espressione del tipo:

$$X_t = e^{tA}X_0 + \int_0^t e^{(t-u)A}c\ du + \int_0^t e^{(t-u)A}\sigma\ dW_u$$

Ricordiamo pure che, nel caso di una matrice A, il semigruppo associato era $(e^{tA})_{t\geq 0}$. Una candidata soluzione per l'equazione nello spazio H puó essere:

$$u_t = S_t u_0 + \int_0^t S_{t-u}c\ du + \int_0^t S_{t-u}\sigma\ dW_u \tag{6.2}$$

Teorema 6.5 *: se $c, \sigma \in H$, allora il processo (6.2) é l'unica soluzione mild dell'equazione; inoltre, se $c, \sigma \in D(A)$, allora (6.2) é l'unica soluzione forte.*

Dimostrazione: dimostriamo che l'espressione di sopra é soluzione. Notiamo prima di tutto che, siccome $(S_t)_t$ é un semigruppo fortemente continuo, allora $\exists M, \lambda$ tali che $\|S_t\| \leq Me^{\lambda t}$, quindi $\int_0^t \|S_{t-u}c\|_H\ du \leq M\|c\|_H \int_0^t e^{\lambda u}\ du$, e quindi il primo integrale ha senso; inoltre $\int_0^t \|S_{t-u}\sigma\|_H^2\ du \leq M^2\|\sigma\|_H^2 \int_0^t e^{2\lambda u}\ du$, e quindi anche il secondo é definito. Proviamo ora la seconda parte del teorema.

Notiamo che l'integrale stocastico presente nell'espressione é l'integrale di una funzione deterministica a valori in H, pertanto é esprimibile in questo modo:

$$\begin{aligned} \int_0^t S_{t-u}\sigma\ dW_u &= [(S_{t-u}\sigma)W_u]_0^t + \int_0^t A(S_{t-u}\sigma)W_u\ du = \\ &= \sigma W_t + \int_0^t A(S_{t-u}\sigma)W_u\ du \end{aligned}$$

Allora abbiamo questa scrittura:

$$u_t = S_t u_0 + \int_0^t S_{t-u} c \; du + \sigma W_t + \int_0^t A(S_{t-u}\sigma) W_u \; du$$

Sfruttando la formula:

$$f(t) - f(0) = \int_0^t \frac{d}{dv} f(v) \; dv$$

che é valida se $f : [0, T] \to H$ é derivabile, si arriva a scrivere:

$$\begin{aligned}
u_t &= \int_0^v S_v u_0 \; du + u_0 + \int_0^t \left(c + \int_0^v ASv - uc \; du \right) \; dv + \\
&\quad + \int_0^t \sigma \; dW_u + \int_0^t \left(A\sigma W_v + \int_0^v A^2 (S_{v-u}\sigma) W_u \; du \right) \; dv = \\
&= u_0 + \int_0^t \left(A \left(S_v u_0 + \int_0^v S_{v-u} c \; du + \sigma W_v + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \int_0^v A(S_{v-u}\sigma) W_u \; du \right) + c \right) \; dv + \int_0^t \sigma \; dW_u = \\
&= u_0 + \int_0^t (A u_v + c) \; dv + \int_0^t \sigma \; dW_u
\end{aligned}$$

e quindi il processo $(u_t)_t$ é soluzione dell'equazione. Per una dimostrazione dell'unicitá vedere Da Prato - Zabczyk[1].

□

Verifichiamo ora che la soluzione esplicita é un processo gaussiano. Per questo, basta controllare che $\forall t_1, ..., t_n$ la variabile aleatoria $(u_{t_1}, ..., u_{t_n})$ é gaussiana in H^n; questo significa che $\forall \phi \in (H^n)^*$ la variabile aleatoria reale $\phi(u_{t_1}, ..., u_{t_n})$ deve essere gaussiana; per il teorema di rappresentazione di Riesz, questo equivale a controllare che $\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in H$:

$$\begin{aligned}
\sum_1^n {}_i < \lambda_i, u_{t_i} >_H &= \sum_1^n {}_i < \lambda_i, S_{t_i} u_0 >_H + \sum_1^n {}_i < \lambda_i, \int_0^{t_i} S_{t_i - u} c \; du >_H + \\
&\quad + \sum_1^n {}_i < \lambda_i, \int_0^{t_i} S_{t_i - u} \sigma \; dW_u >_H
\end{aligned}$$

il primo ed il secondo addendo sono numeri reali. Verifichiamo che il terzo é una variabile aleatoria gaussiana reale:

$$\begin{aligned}
\sum_1^n {}_i < \lambda_i, \int_0^{t_i} S_{t_i - u} \sigma \; dW_u >_H &= \sum_1^n {}_i < \lambda_i, \int_0^T \mathbf{1}_{[0,t_i)} S_{t_i - u} \sigma \; dW_u >_H = \\
&= \sum_1^n {}_i \int_0^T < \lambda_i, \mathbf{1}_{[0,t_i)} S_{t_i - u} \sigma >_H \; dW_u = \\
&= \int_0^T \left(\sum_1^n {}_i < \lambda_i, \mathbf{1}_{[0,t_i)} S_{t_i - u} \sigma >_H \right) \; dW_u
\end{aligned}$$

che é l'integrale stocastico di una funzione deterministica in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, quindi é una variabile aleatoria gaussiana. La legge del processo é quindi univocamente determinata dalla sua media e dalla sua covarianza. Per calcolarle ci sará utile il seguente lemma:

Lemma 6.6 *: se X e Y sono variabili aleatorie a valori in H con $Q = Cov(X,Y)$, e $S, T \in \mathcal{L}(H,H)$, allora $Cov(SX, TY) = TQS^*$.*

Dimostrazione: ricordando che $Q = Cov(X,Y)$ significa che

$$< Qx, y >= Cov(< X, x >< Y, y >) \ \forall x, y \in H$$

se $S, T \in \mathcal{L}(H,H)$ allora:

$$\begin{aligned} Cov(< SX, x >< TY, y >) &= Cov(< X, S^*x >< Y, T^*y >) = \\ &= < QS^*x, T^*y >=< TQS^*x, y > \end{aligned}$$

cioé $Cov(SX, TY) = TQS^*$.

□

Calcoliamo ora media e covarianza, supponendo che $0 \leq t \leq v$:

$$E[u_t] = E[S_t u_0] + \int_0^t S_{t-u} c \, du$$

$$\begin{aligned} Cov(u_t, u_v) &= Cov(S_t u_0 + \int_0^t S_{t-u}\sigma \, dW_u, S_v u_0 + \int_0^v S_{v-u}\sigma \, dW_u) = \\ &= Cov(S_t u_0, S_v u_0) + Cov(\int_0^t S_{t-u}\sigma \, dW_u, \int_0^t S_{v-u}\sigma \, dW_u) = \\ &= S_v Cov(u_0, u_0) S_t^* + \int_0^t (S_{t-u}\sigma) \otimes (S_{v-u}\sigma) \, du \end{aligned}$$

Abbiamo cosí dimostrato il seguente:

Teorema 6.7 *: la soluzione dell'equazione (6.1) é un processo gaussiano, con media:*

$$E[u_t] = E[S_t u_0] + \int_0^t S_{t-u} c \, du$$

e covarianza:

$$Cov(u_t, u_v) = S_v Cov(u_0, u_0) S_t^* + \int_0^t (S_{t-u}\sigma) \otimes (S_{v-u}\sigma) \, du$$

□

Uno dei problemi che si presentano a volte é quello di trovare una misura per il processo che sia invariante per traslazioni temporali.

Chiamiamo $u_t(X)$ la soluzione dell'equazione avente dato iniziale X; definiamo poi le classi:

$$B_b(H) = \{\phi : H \to \mathbf{R} \mid \phi \text{ misurabile e limitata}\}$$
$$C_b(H) = \{\phi : H \to \mathbf{R} \mid \phi \text{ continua e limitata}\}$$
$$M^+(\mathcal{H}) = \{\mu \mid \mu \text{ misura positiva su } (H, \mathcal{H})\}$$
$$M_1^+(\mathcal{H}) = \{\mu \mid \mu \text{ misura di probabilità su } (H, \mathcal{H})\}$$

e gli operatori $P_t : B_b(H) \to B_b(H)$ tali che $\forall \phi \in B_b(H), \forall x \in H$:

$$(P_t\phi)(x) = E[\phi(u_t(x))]$$

Definiamo poi il nucleo $P : [0,T] \times H \times \mathcal{H} \to \mathbf{R}$ tale che, $\forall t \in [0,T], x \in H, B \in \mathcal{H}$:

$$P(t,x,B) = P_t\mathbf{1}_B(x) = E[\mathbf{1}_B(u_t(x))] = \mathcal{L}(u_t(x))(B)$$

Definiamo infine $P_t^* : M_1^+ \to M_1^+$ tale che $\forall \mu \in M_1^+, \forall B \in \mathcal{H}$:

$$(P_t^*\mu)(B) = \int_H P(t,x,B)\ d\mu(x)$$

se definiamo l'accoppiamento di dualitá tra $B_b(H)$ e $M_1^+(\mathcal{H})$:

$$< \phi, \mu >= \int_H \phi(x)\ d\mu(x)$$

allora abbiamo il:

Lemma 6.8 *:* $\forall \phi \in B_b(H), \forall \mu \in M_1^+(\mathcal{H})$*:*

$$< P_t\phi, \mu >=< \phi, P_t^*\mu >$$

Dimostrazione: verifichiamo che la relazione vale $\forall \mathbf{1}_B, B \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} < P_t\mathbf{1}_B, \mu > &= \int_H P_t\mathbf{1}_B(x)\ d\mu(x) = \int_H P(t,x,B)\ d\mu(x) = \\ &= (P_t^*)(B) =< \mathbf{1}_B, P_t^* > \end{aligned}$$

siccome le indicatrici sono dense in $B_b(H)$, la relazione é vera $\forall \phi \in B_b(H)$.

□

Vediamo ora che gli operatori appena definiti danno una utile espressione della legge delle soluzioni:

Proposizione 6.9 *: se $\mathcal{L}(X) = \nu$, allora $P_t^*\nu = \mathcal{L}(u_t(X))$, e $P_t^*\delta_x = \mathcal{L}(u_t(x))$*

Dimostrazione: $\forall B \in \mathcal{H}$ ho:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_t(X))(B) &= \mathbf{P}\{u_t(X) \in B\} = E[\mathbf{1}_B(u_t(X))] = \int_H P_t \mathbf{1}_B(x)\ d\nu(x) = \\ &= < P_t \mathbf{1}_B, \nu > = < \mathbf{1}_B, P_t^* \nu > = (P_t^*\nu)(B) \end{aligned}$$

se $\mathcal{L}(X) = \delta_x$, allora $P_t^*\delta_x = \mathcal{L}(u_t(X)) = \mathcal{L}(u_t(x))$

□

Corollario 6.10 *: $P_{t+s}^* = P_t^* \circ P_s^*$; $P_{t+s} = P_t \circ P_s$*

Dimostrazione: se pongo $\mathcal{L}(X) = \nu$, allora $P_t^* \circ P_s^* \nu = \mathcal{L}(u_t(u_s(X)))$; siccome l'equazione é autonoma, questa é uguale a $\mathcal{L}(u_{t+s}(X)) = P_{t+s}^*\nu$.
La seconda relazione si ricava banalmente dalla prima e dalla relazione di dualitá.

□

Diciamo che una misura $\nu \in M_1^+(\mathcal{H})$ é **invariante per traslazioni temporali**, o semplicemente **invariante**, se é invariante per gli operatori P_t^*, cioé se $\forall t \geq 0$ $P_t^*\nu = \nu$.

Lemma 6.11 *: se $\exists \mu, \nu \in M_1^+$ tali che $P_t^*\mu \to^{deb.} \nu$, allora ν é invariante.*

Dimostrazione: se $P_t^*\mu \to^{deb.} \nu$, allora $\forall h > 0$ ho che $P_{t+h}^*\mu \to^{deb.} \nu$.
Allora $\forall \phi \in C_b(H, \mathbf{R})$:

$$< \phi, P_{t+h}^*\mu > = < P_h\phi, P_t^*\mu >$$

il primo membro tende a $< \phi, \nu >$, mentre il secondo tende a $< P_h\phi, \mu > = < \phi, P_h^*\mu >$, quindi $\nu = P_h^*\nu$ $\forall h > 0$.

□

Corollario 6.12 *: se $\forall \mu \in M_1^+$ abbiamo che $P_t^*\mu \to^{deb.} \nu$, allora ν é l'unica misura invariante.*

□

Per verificare questa condizione é spesso utile la seguente:

Proposizione 6.13 *: se* $\exists \nu \in M_1^+$ *tale che* $\forall x \in H$: $P_t^* \delta_x \rightarrow^{deb.} \nu$, *allora* $\forall \mu \in M_1^+$ *ho che* $P_t^* \mu \rightarrow^{deb.} \nu$, *e quindi* ν *é l'unica misura invariante.*

Dimostrazione: $\forall \mu \in M_1^+$, $\forall \phi \in B_b(H)$ si ha che:

$$\begin{aligned} < \phi, P_t^* \mu > &= < P_t \phi, \mu > = \int_H P_t \phi(x) \; d\mu(x) = \int_H < P_t \phi, \delta_x > \; d\mu(x) = \\ &= \int_H < \phi, P_t^* \delta_x > \; d\mu(x) \rightarrow^{deb.} \int_H < \phi, \nu > \; d\mu = < \phi, \nu > \end{aligned}$$

□

Citiamo ora un teorema relativo a questo problema che ci sará utile in seguito. Chiamiamo Q la covarianza del moto browniano, che nel nostro caso é uguale a $\sigma \otimes \sigma$.

Teorema 6.14 *: se chiamo* $Q_t = \int_0^t S_u Q S_u^* \; du$, *ed é verificata la condizione:*

1) $\sup_{t \geq 0} \mathrm{Tr}\,(Q_t) < +\infty$

e una delle due seguenti:

2) esiste una misura invariante ν *per l'equazione:*

$$dz_t = (Az + c) \; dt$$

3) se $c \in Im(A)$, *ed esiste una misura invariante* ν *per l'equazione:*

$$dz_t = Az \; dt$$

allora esiste una misura invariante per l'equazione (6.1), e in particolare:

- se (2) é soddisfatta, allora ogni misura invariante é della forma:

$$\mu = \nu * N(0, Q_\infty)$$

- se (3) é soddisfatta, allora ogni misura invariante é della forma:

$$\mu = \nu * \delta_b * N(0, Q_\infty)$$

dove $b \in D(A)$ *é un vettore tale che* $Ab = -c$.

Per una dimostrazione vedere Da Prato-Zabczyk[2].

Capitolo 7

Fondamenti di Finanza Matematica

La Finanza Matematica ha lo scopo di studiare la corretta formalizzazione ed i calcoli legati allo scambio tra importi monetari pagabili in epoche diverse. Le problematiche legate a questa scienza sorgono da due fenomeni che accadono spesso nella realtá, e che vengono quindi assunti come postulati:

1) il possesso di un capitale (o di un qualsiasi bene il cui valore é esprimibile mediante un capitale) é vantaggioso, qualunque sia il suo importo; quindi ogni soggetto preferisce possedere un capitale che non possederlo, e ognuno tende a possedere piú capitale possibile. Per questo motivo un capitale viene rappresentato mediante un numero reale positivo o negativo a seconda che si possieda un capitale o che si abbia un debito.

2) la disponibilitá temporanea di un capitale proprio o altrui é un vantaggio, alla cui fruizione si puó associare un prezzo.

Questi sono i due capisaldi su cui si basa la Finanza Matematica. Ogni modello, deterministico o stocastico, che descriva scambi di denaro o di merci a cui si puó associare un prezzo, dovrá quindi tenere conto di questi due postulati.

Chiaramente, questi due postulati lasciano un'ampia libertá di scelta delle altre ipotesi da fare sul mercato (tempi discreti o continui, ambito deterministico o stocastico, e molte altre che verranno presentate in seguito). Noi non analizzeremo tutti i possibili modelli, ma ci limiteremo a presentare un modello deterministico, che servirá come esempio di possibili fenomeni che potranno avvenire, per poi passare ad un modello stocastico a tempi continui che é quello maggiormente usato per modellizzare i mercati finanziari.

7.1 Un primo modello deterministico

Presentiamo ora un semplice modello deterministico che soddisfa i due assiomi sopra citati, e che viene introdotto per capire meglio alcune notazioni ed ipotesi che dopo si useranno.

La struttura minima che consente di modellizzare scambi di denaro é della forma $\mathbf{R} \times T$, dove:

- **R** é l'insieme di tutte le possibili quantitá di denaro.

- T é un sottoinsieme della retta reale, chiamato **insieme dei tempi**. Gli insiemi dei tempi T piú usati sono di due tipi fondamentali: se T é un insieme discreto, si parla di **modello a tempo discreto**, mentre se T é un intervallo chiuso, si parla di **modello a tempo continuo**.

L'ammontare del costo del postulato (2) é chiamato **interesse**, ed é una funzione dell'importo che si ha a disposizione $X \in \mathbf{R}$ e degli istanti di inizio s e di fine t di tale disponibilitá (chiaramente si avrá $s, t \in T, s < t$).

A causa del secondo postulato, possedere lo stesso capitale X in due date differenti $s < t$ non é la stessa cosa, poiché, se lo si possiede all'istante s lo si puó ad esempio prestare e recuperare al tempo t, riscuotendo un interesse aggiuntivo. Per questo fatto, comunemente si associano agli importi le date di possesso corrispondenti, ottenendo la coppia ordinata $(X, t) \in \mathbf{R} \times T$, che si chiama **insieme degli importi datati**.

In virtú dei due postulati, possiamo indurre un ordinamento parziale $\succeq$ su $\mathbf{R} \times T$, che indichi una preferenza; in particolare, $(X, t) \succeq (Y, u)$ significa che (X, t) viene preferito (non strettamente) a (Y, s). Definiamo quindi la relazione:

1) se $X, Y \in \mathbf{R}, X < Y$, allora $(X, t) \preceq (Y, t)$ $\forall t \in T$

2) se $s, t \in T, s < t$, allora $(X, s) \preceq (X, t)$ $\forall X \geq 0$

Ora, il mercato sotto esame sará composto di diversi individui, il cui comportamento seguirá queste due regole, ma nei casi non contemplati potrá variare da soggetto a soggetto. Esaminiamo ora il possibile comportamento di un individuo razionale sul mercato, preoccupandoci poi di studiare come questi individui interagiscono tra di loro.

Possiamo rappresentare un **agente** presente sul mercato tramite una relazione che gode, oltre alle due proprietá sopracitate, anche delle seguenti:

3) se $(X, t) \preceq (Y, u)$ e $(Y, u) \preceq (Z, v)$, allora $(X, t) \preceq (Z, v)$ (**proprietá transitiva**)

4) $\forall (X, t), (Y, u) \in \mathbf{R} \times T$, si puó sempre dire se $(X, t) \preceq (Y, u)$ o viceversa (**proprietá di completezza**)

Una relazione che gode delle proprietá (3) e (4) si dice **relazione di preferenza**; poiché la relazione é completa, allora é anche riflessiva.

Esempio 7.1 *: se per una data relazione di preferenza esiste una funzione* $u : \mathbf{R} \times T \to \mathbf{R}$ *tale che* $(X, t) \preceq (Y, u) \iff u(X, t) \leq u(Y, u)$*, allora* u *viene chiamata* **funzione utilitá (di Von Neumann-Morgenstern)** *per la relazione di preferenza* $\preceq$*. Se la relazione verifica i punti (1) e (2), allora* u *sará crescente in* X*, e decrescente in* t $\forall X \geq 0$*. Se infine, fissato* $t \in T$*, la funzione* $X \to u(X, t)$ *é continua e tende a* $+\infty$ *per* $X \to +\infty$*, allora, se fissiamo* $s, t \in T$ *e* $X \in \mathbf{R}$*, possiamo sempre trovare un unico* $Y \in \mathbf{R}$ *tale che* $u(X, s) = u(Y, t)$*, e quindi possiamo sempre trovare* Y *tale che* (X, s) *é equivalente a* (Y, t)*.*

Piú in generale dico che la relazione $\preceq$ gode del **principio di equivalenza** se $\forall s, t \in T$ e $\forall X \in R$ esiste un unico $Y \in R$ tale che (X, s) é equivalente a (Y, t). Se succede questo, allora possiamo introdurre la seguente nomenclatura:

- se $s < t$, dico che Y é il **montante** in t relativo al capitale X valutato in s. L'**interesse** relativo a X, s e t verrá quindi ad essere $I = Y - X$.

- se $t < s$, dico che Y é il **valore scontato** o **valore anticipato** in t del capitale X valutato al tempo s. La quantitá $D = X - Y$, che comunemente si chiama **sconto**, corrisponde al capitale perso per effetto della valutazione in anticipo del capitale.

Se $t = 0$ (che in genere é l'istante di riferimento per le operazioni finanziarie), si indica X anche con il nome di **valore attuale**.

Al principio di equivalenza appena citato corrisponde, nell'interpretazione intuitiva, il seguente **principio di equivalenza finanziaria**:

É equivalente incassare (pagare) una somma X ad un tempo s invece di incassarla (pagarla) ad un tempo $t > s$, purché ci sia l'incasso (pagamento) aggiuntivo di una opportuna somma I che compensi tale differimento.

7.2 Leggi finanziarie

Dalla discussione relativa al principio di equivalenza si puó concludere che, se la relazione $\preceq$ gode del principio di equivalenza, possiamo definire una funzione $f : \mathbf{R} \times T^2 \to \mathbf{R}$ tale che $Y = f(X, s, t)$ se e solo se (X, s) é equivalente a (Y, t). Nel caso in cui definisco la f per $s < t$, Y é un montante, e si chiama la f **legge di capitalizzazione**; nel caso in cui, invece, definisco la f per $s > t$, Y é un capitale scontato, e la f si dice **legge di sconto**.

Generalmente si vuole che il montante o il valore scontato siano direttamente proporzionali al capitale investito. Per questo motivo in molte applicazioni la f é anche omogenea di primo grado rispetto ad X; questo implica che $(X, s) \preceq (Y, t) \iff (kX, s) \preceq (kY, t)\ \forall k \in \mathbf{R}^+$. In questo caso, inoltre, si puó determinare univocamente la f, semplicemente assegnandogli i valori per $X = 1$. Infatti ho che $f(X, s, t) = Xf(1, s, t)$; posso inoltre determinare la f in questo modo:

$$f(X, s, t) = \begin{cases} Xm(s, t) & \text{se } s < t \\ Xa(s, t) & \text{se } s > t \end{cases}$$

le funzioni $m : T^2 \to \mathbf{R}$ e $a : T^2 \to \mathbf{R}$ sono dette **fattori di scambio** ed in particolare m é detta **fattore di montante**, ed a **fattore di sconto**. Per la proprietá riflessiva di $\preceq$, ho che $m(t, t) = a(t, t) = 1\ \forall t \in T$.

Puó accadere (ma non é sempre cosí) che, se $s < t$ e $Y = f(X, s, t)$, allora $X = f(Y, t, s)$; quando ció succede, la relazione $<<$ gode della proprietá simmetrica, e dico che la f é una **legge simmetrica**. Se questo accade, allora é sufficiente specificare la f solo in $\{(s, t) \in T^2 \mid s < t\}$ (o nel complementare). Se f, oltre ad essere una legge simmetrica, é anche omogenea di primo grado, allora ho che $m(s,t)a(t,s) = 1 \ \forall s,t \in T$, ed é quindi sufficiente specificare la f mediante uno solo dei due fattori di scambio.

Supponiamo ora di avere una legge finanziaria f omogenea di primo grado, e quindi univocamente determinata da m e da a. Supponiamo inoltre di voler impiegare un capitale secondo questa legge, dal tempo t al tempo $T = t + x$, per una durata x. Chiamo:

- **tasso di interesse (periodale) iniziale** la quantitá $m(t,T) - 1$, che é il tasso di interesse applicato dal tempo t al tempo T;

- **intensitá di interesse (periodale) iniziale** la quantitá:

$$\frac{m(t, t+x) - 1}{x}$$

che é la quantitá per cui moltiplicare la durata x per ottenere l'interesse applicato nel periodo da t a $t + x$.

Supponiamo ora di voler prolungare la durata dell'impiego del capitale, dal tempo T al tempo $T + h$; chiamo:

- **tasso di interesse di proseguimento** la quantitá:

$$\frac{m(t, T+h) - m(t,T)}{m(t,T)} = \frac{m(t, T+h)}{m(t,T)} - 1$$

che é l'interesse nel periodo da T a $T+h$, rapportato al fattore di montante dal tempo t al tempo T.

- **intensitá d'interesse di proseguimento** la quantitá:

$$\frac{m(t, T+h) - m(t,T)}{hm(t,T)}$$

che é il rapporto incrementale del fattore di montante rispetto all'istante finale al tempo T, rapportato al fattore di montante. Se questa quantitá é derivabile parzialmente rispetto all'istante finale, allora, siccome $m(t,T) > 0$, posso definire l'**intensitá istantanea di interesse** in $T = t + x$ di un impegno iniziato in t:

$$r(t,x) = \lim_{h \to 0} \frac{m(t, t+x+h) - m(t, t+x)}{hm(t, t+x)}$$

Allora:

$$r(t,x) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} m(t, t+x)}{m(t, t+x)} = \frac{\partial}{\partial x} \log m(t, t+x)$$

Lemma 7.2 *: il montante di proseguimento e l'intensitá istantanea di interesse sono legati da questa uguaglianza:*

$$\frac{m(t,T+h)}{m(t,T)} = \exp\left(\int_x^{x+h} r(t,u)\ du\right)$$

Dimostrazione: dalla definizione di $r(t,x)$ ricavo che:

$$\begin{aligned}\int_x^{x+h} r(t,u)\ du &= \int_x^{x+h} \frac{\partial}{\partial u}\log m(t,t+u)\ du = [\log m(t,t+u)]_x^{x+h} = \\ &= \log\frac{m(t,t+x+h)}{m(t,t+x)}\end{aligned}$$

da qui segue la tesi.

□

7.3 Analisi dimensionale delle grandezze finanziarie

Come per la Fisica, anche in Finanza si puó assegnare ad ogni grandezza una unitá di misura, avente una dimensione ben precisa. Si possono quindi definire, come in Fisica, **grandezze fondamentali** e **grandezze derivate**, cosí chiamate perché si possono far derivare da quelle fondamentali.

Le grandezze fondamentali in Finanza sono due:
- l'**importo** monetario $[I]$, che misura l'entitá di transizioni finanziarie; le unitá di misura usuali per un importo sono le monete di diversi Paesi (lira, dollaro, marco, ecc...) o loro multipli.
- il **tempo** $[t]$, usato per misurare le durate delle operazioni; unitá di misura usuali sono il giorno o l'anno

Alcune grandezze derivate sono:
- il **tasso** $[I.I^{-1}]$, definito come un importo diviso un importo (quindi un numero puro), che infatti si usa come fattore per passare da un importo ad un altro importo.
- il **flusso** $[I.t^{-1}]$, definito come un importo diviso per un tempo, che si usa per descrivere capitali che maturano in funzione del tempo.
- l'**intensitá** $[I.I^{-1}.t^{-1}]$, definita come un importo diviso un importo per un tempo, oppure come un tasso diviso un tempo, o come un flusso diviso un importo, che si usa per studiare la formazione di un capitale nel tempo rispetto ad un altro capitale.

Notiamo che, mentre nella Fisica vi sono sette grandezze fondamentali, e riunire tutte le possibili grandezze derivate in una tabella é praticamente impossibile, in Finanza le grandezze fondamentali sono solo due, ed é quindi possibile riunire le grandezze dimensionali (fondamentali e derivate) nella seguente tabella, rappresentandole secondo potenze decrescenti delle due unitá fondamentali:

$$\begin{array}{cccc} & t & t^0 & t^{-1} \\ I & --- & importo & flusso \\ I^0 & tempo & tasso & intensitá \end{array}$$

Come per la Fisica, ogni volta che si discute una teoria finanziaria, bisognerá stare attenti alle dimensioni delle grandezze studiate, controllando la loro coerenza in questa tabella.

7.4 Un modello deterministico di mercato obbligazionario

Vogliamo ora rivolgere la nostra attenzione ad un tipo particolare di mercato, che é quello dei titoli obbligazionari. Questo é ancora un modello deterministico, che peró contiene quasi tutte le ipotesi finanziarie che si fanno di solito su un mercato, e viene introdotto per meglio capire il modello piú generale che verrá presentato in seguito.

Un **titolo obbligazionario** (o piú semplicemente una **obbligazione**, che in inglese si indica con **bond**) é un contratto trasferibile in cui i due contraenti si impegnano a scambiarsi quantitá di denaro fissate in date diverse fissate. In particolare, l'agente che vende il contratto riceve un importo all'istante della vendita, ed eroga un altro importo, in una o piú date, al possessore del contratto. Tipicamente si indica con il nome di **emittente** l'ente che emette e vende il contratto, e **contraente** la persona (o l'ente) che ne viene in possesso. La parola **trasferibile** nella definizione significa che chi possiede una obbligazione é libero di venderlo a una terza persona in ogni istante in cui il titolo stesso sia valido; in questo caso il contratto rimarrá valido tra l'emittente e la terza persona, senza che il primo contraente sia piú coinvolto (a meno che, naturalmente, non ricompri il titolo).

A causa della trasferibilitá, una obbligazione ha un prezzo che evolve nel tempo.

In base ad un'altra caratteristica, si distinguono due tipi di titoli:

- titoli **a cedola nulla** (in inglese **zero coupon**): essi non garantiscono al contraente la riscossione di somme prima della scadenza del contratto. Un tipico esempio di titolo a cedola nulla é un Bot, che dá un utile solo al momento della sua scadenza.

- titoli **con cedola** (in inglese **coupon**): essi garantiscono al contraente la riscossione di somme di denaro prima della scadenza del contratto. Un esempio di titolo a cedola fissa é un Btp (Buono del Tesoro Poliennale), che ha durata pari a 3, 5, 7 o 10 anni e paga cedole semestrali.

Descriviamo ora il mercato in cui questi titoli vengono scambiati; le tre ipotesi tipiche che si fanno sui mercati, sono quelle di non frizionalitá, di competitivitá e di assenza di arbitraggi.

Un mercato si dice **non frizionale** se:

- non ci sono **costi di transazione** né **gravami fiscali**, cioé ogni compravendita di titoli non comporta costi né addebiti fiscali per nessuno dei due contraenti.

- i titoli sono **infinitamente divisibili**, cioé non ci sono limitazioni sulle quantitá minime o massime di titoli trattati.

- sono consentite **vendite allo scoperto** (in inglese **short sales**), é possibile cioé vendere titoli che non si possiedono.

- non c'é **rischio di insolvenza**; ció significa che ogni contratto sottostante ad un titolo verrá onorato sicuramente.

Per fare le altre due ipotesi, facciamo la convenzione che ogni volta che si parla di un importo, questo puó essere sotto forma di denaro o di un opportuno numero di obbligazioni, senza che una delle due forme sia preferita all'altra.

Un mercato si dice **competitivo** se ogni agente presente in esso :

- é un **massimizzatore di profitto**, cioé, a paritá di altre condizioni, preferisce una somma maggiore di denaro ad una somma minore.

- non ha la possibilitá di influenzare, con il solo suo comportamento, il prezzo dei titoli.

Definiamo infine il concetto di **arbitraggio**. Consideriamo una operazione finanziaria (X, t), di importi:

$$X = (X_0, ..., X_n)$$

non tutti nulli, esigibili ai tempi:

$$t = (t_0, ..., t_n)$$

tali che $t_{i-1} \leq t_i \ \forall i = 1, ..., n$. Diciamo che (X, t) é un **arbitraggio non rischioso**, o piú brevemente un **arbitraggio**, se $X_i \geq 0 \ \forall i$, e se $\exists i$ tale che $X_i > 0$. Ció significa che una delle due parti coinvolte nell'operazione ha la certezza di incassare almeno una volta senza dover mai pagare.

Un mercato si dice allora **esente da arbitraggi** se nessun agente ha la possibilitá di operare arbitraggi in esso.

Notiamo che in questo modello ci sono piú agenti; avevamo modellizzato un agente con una relazione di preferenza che coinvolge importi, la cui "appetibilitá" abbiamo supposto essere indipendente dalla forma in cui gli importi sono; dunque, ai fini della relazione di preferenza, é equivalente possedere una obbligazione o il suo prezzo in denaro ad un dato tempo. Possiamo allora definire una nuova relazione di preferenza in cui peró non compare piú solo un importo, ma un **portafoglio** di obbligazioni, cioé un vettore $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)$, a componenti reali, in cui ciascuna componente é uguale alla quantitá del titolo corrispondente posseduta dall'agente (un numero negativo indicherá allora uno **scoperto**, cioé che é stata venduta una quantitá del titolo senza possederla).

Per definire la nuova relazione di preferenza $\preceq'$ per ogni agente del mercato, é sufficiente prendere quella giá esistente sugli importi datati, e definire:

$$(\theta, s) \preceq' (\theta', t) \iff (<\theta, Z_s>, s) \preceq (<\theta', Z_t>, t)$$

dove Z_s, Z_t sono i vettori dei prezzi dei titoli agli istanti s e t, e $< ., . >$ é il prodotto scalare su $\mathbf{R}^n$.

Sorge ora spontanea la domanda: ci possono essere sul mercato due agenti aventi due diverse relazioni di preferenza? La risposta, tenendo conto delle ipotesi di competitivitá, non frizionalitá e assenza di arbitraggi sul mercato, é no. Infatti, se esistessero due relazioni di preferenza $\preceq$ e $\preceq'$ diverse sul mercato, corrispondenti a due diversi agenti, un terzo agente potrebbe costruire un arbitraggio. In particolare, supponiamo che $s < t$ siano possibili tempi, e che $(X, s) \simeq (Y, t)$ e $(X, s) \simeq' (Y + Z, t)$, dove $Z > 0$. Costruiamo la seguente operazione:

1) al tempo s, prendiamo a prestito la somma X dal primo agente, e prestiamo la stessa quantitá al secondo;

2) al tempo t, restituiamo al primo la somma $X + \frac{1}{3}Z$, e chiediamo al secondo la somma $X + \frac{2}{3}Z$.

Notiamo che non abbiamo fatto l'ipotesi che gli agenti accettino ogni possibile transazione; tuttavia, siccome entrambi gli agenti ritengono che gli effetti dell'operazione che li riguardano siano vantaggiosi rispetto alla loro relazione di preferenza, entrambi accetteranno l'operazione (a rigore, essi preferiranno l'operazione presentatagli all'operazione nulla). Notiamo peró che siamo partiti con una somma nulla di denaro al tempo s, e ci troviamo con una somma pari a $\frac{1}{3}Z$ al tempo t. Questo é un arbitraggio, ed é quindi in contrasto con le ipotesi fatte sul mercato.

7.5 Obbligazioni a cedola nulla

Analizziamo ora un tipo particolare di obbligazione, cioé una obbligazione a cedola nulla.

Supponiamo di essere nell'istante s, e consideriamo un titolo obbligazionario che garantisce il pagamento di una unitá monetaria al tempo $t > s$ senza il pagamento di somme intermedie. Si tratta, quindi di una obbligazione a cedola nulla. Indichiamo con:

$$v(s, t), s < t$$

il **prezzo** del nostro titolo all'istante s.

Teorema 7.3 *: il prezzo del titolo $v(s, t)$ deve soddisfare le seguenti quattro proprietá:*

1) $v(s, t) > 0 \ \forall s \le t$
2) $v(s, s) = 1$
3) $v(s, t) < 1 \ \forall s < t$
4) $v(s, t) > v(s, T) \ \forall s \le t < T$

Dimostrazione: l'idea della dimostrazione, come molte dimostrazioni in Finanza, si basa sul fatto che, se una proprietá da provare fosse violata, si avrebbe un arbitraggio, quindi il mercato violerebbe i nostri postulati. Vediamo in dettaglio questo fatto.

Se $\exists s, t$ tali che $s < t$ e $v(s,t) \leq 0$, allora l'operazione:

$$(x,t) = \begin{pmatrix} -v(s,t) & 1 \\ s & t \end{pmatrix}$$

sarebbe un arbitraggio possibile sul mercato.

La seconda proprietá é valida per definizione di m.

La terza proprietá é giustificata dal postulato di rendimento del denaro.

Per dimostrare la quarta proprietá si procede come per la prima: se per assurdo esistono $s \leq t < T$ tali che $v(s,t) \leq v(s,T)$, allora costruisco la seguente operazione:

- all'istante s acquisto il titolo a scadenza t e vendo allo scoperto il titolo a scadenza T.

- all'istante t acquisto il titolo con scadenza T.

Gli effetti dell'operazione vengono allora descritti da:

$$(x,t) = \begin{pmatrix} -v(s,t) + v(s,T) & 1 - v(t,T) & 1 - 1 \\ s & t & T \end{pmatrix}$$

Siccome $1 - v(t,T) > 0$ per quanto dimostrato prima, se la quota $-v(s,t) + v(s,T)$ é non negativa, siamo in presenza di un arbitraggio. Siccome questo va contro i postulati del nostro mercato, la tesi deve essere verificata.

$\square$

Supponiamo sempre di essere nell'istante s, e consideriamo ora un titolo obbligazionario che garantisce il pagamento di una somma x al tempo $t > s$. Si tratta ancora di una obbligazione a cedola nulla, che si indica col nome di titolo dal **valore facciale** x. Indichiamo con:

$$V_x(s,t), s < t$$

il **prezzo** del nostro titolo all'istante s.

Teorema 7.4 *: se il titolo unitario dal prezzo $v(s,t)$ e il titolo dal valore facciale x, dal prezzo $V_x(s,t)$, sono entrambi presenti sul mercato, allora si ha:*

$$V_x(s,t) = xv(s,t)$$

Dimostrazione: ancora una volta procediamo per assurdo, sfruttando l'assenza di arbitraggi sul mercato. Suppongo che esistano s, t tali che $s < t$ e valga: $V_x(s,t) < xv(s,t)$. Allora costruisco l'operazione:

- all'istante t compro il titolo con valore facciale x e vendo allo scoperto x titoli unitari (cosa che posso sempre fare perché i titoli sono infinitamente divisibili).

Questa operazione provoca il flusso di cassa:

$$(y,t) = \begin{pmatrix} -V_x(s,t) + xv(s,T) & x - 1.x \\ s & t \end{pmatrix}$$

Se $V_x(s,t) < xv(s,t)$, allora si sarebbe in presenza di un arbitragio.

Per dimostrare che anche la disuguaglianza opposta é impossibile, si procede analogamente, costruendo l'operazione opposta.

□

7.6 Modello di Harrison - Kreps per i mercati

Rivolgiamo ora la nostra attenzione ad un modello di mercato non piú deterministico, ma in cui ci sono elementi di incertezza. Questo modello all'inizio conterrá solo due date in cui é possibile effettuare operazioni; inoltre l'unica operazione possibile sará la decisione su quanto denaro impiegare nel mercato nelle date in cui questo é consentito; per questo una generica operazione verrá chiamata **consumo** in questo contesto; un consumo negativo di denaro indicherá un ricavo.

Indichiamo inoltre la prima data con l'istante 0, che si identifica con il presente, e in cui si assume di conoscere con certezza il consumo; l'altra data con l'istante finale T, in cui ci sará un consumo aleatorio.

Presentiamo ora il modello usato per rappresentare questa situazione: prendiamo uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, dove:

- Ω rappresenta tutti gli stati possibili del mondo dal tempo 0 al tempo T;

- $\mathcal{F}$ rappresenta la quantitá di informazioni disponibili agli agenti del mercato;

- $\mathbf{P}$ é la misura di probabilitá che esprime l'indice di plausibilitá che un agente assegna ai diversi eventi nel mercato.

Notiamo che, mentre lo spazio e la σ-algebra sono gli stessi per tutti gli agenti, la $\mathbf{P}$ é diversa da agente ad agente, poiché ognuno avrá diverse opinioni di plausibilitá per gli eventi possibili; tuttavia, i diversi agenti dovranno avere delle $\mathbf{P}$ tali che:

- $N_{\mathbf{P}} = \{A \in \mathcal{F} \mid \mathbf{P}(A) = 0\}$ dovrá essere uguale per tutte le $\mathbf{P}$ dei diversi agenti, cioé gli eventi che si ritengono impossibili dovranno essere gli stessi per tutti;

- se $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}^*$ sono due misure relative a due agenti diversi, allora $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}^*)$. Infatti lo spazio $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sará collegato alle azioni che un agente puó intraprendere, e vogliamo che tutti gli agenti possano fare le stesse cose.

Ora vogliamo descrivere le decisioni di un agente; supporremo che ogni agente possa decidere quanto consumare con certezza al tempo 0 e quanto consumare al tempo T in dipendenza dallo stato del mondo. Chiamiamo allora $\mathbf{X} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, **consumo** al tempo T una variabile aleatoria $X \in \mathbf{X}$, e **piano di consumo** una coppia $(r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$. La scelta di $\mathbf{X}$ é una scelta tecnica, che faciliterá molte dimostrazioni. Notiamo che $\mathbf{R} \times \mathbf{X}$ é uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare indotto dalla norma:

$$\|(r, X)\|_{\mathbf{R}\times\mathbf{X}} = (|r|^2 + \|X\|^2_{L^2})^{\frac{1}{2}}$$

Chiameremo poi

$$\mathbf{X}^+ = \{X \in \mathbf{X} \mid \mathbf{P}\{X \geq 0\} = 1, \mathbf{P}\{X > 0\} > 0\}$$

e diremo che un piano di consumo (r, X) é **positivo**, scrivendo $(r, X) > 0$, se $r > 0$ e $X \in \mathbf{X}^+$.

Modellizziamo ora un agente sul mercato, identificandolo, come abbiamo fatto prima, con una relazione di preferenza. In questo caso vogliamo che l'agente non faccia solo una scelta relativa ad un singolo consumo, ma vogliamo che scelga una strategia, cioé un piano che gli dica quanto consumare in ogni istante in cui puó. Per questo motivo, l'insieme dei tempi sparisce dagli argomenti della relazione di preferenza (essendo giá implicito nel fatto che ci sono due consumi e due date di consumo), e la relazione viene data sull'insieme di tutti i possibili consumi.

Un **agente** é una relazione binaria di preferenza $\preceq$ (che leggeremo **é preferito a**) su $\mathbf{R} \times \mathbf{X}$ tale che:

- é **convessa**, cioé $\forall (r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$ l'insieme:

$$\{(r', X') \in \mathbf{R} \times \mathbf{X} \mid (r', X') \succeq (r, X)\}$$

é convesso.

- é **continua**, cioé $\forall (r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$ gli insiemi:

$$\{(r', X') \in \mathbf{R} \times \mathbf{X} \mid (r', X') \succeq (r, X)\}$$
$$\{(r', X') \in \mathbf{R} \times \mathbf{X} \mid (r', X') \preceq (r, X)\}$$

sono chiusi nella topologia di $\mathbf{R} \times \mathbf{X}$.

- é **strettamente monotona**, cioé $\forall (r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$, $\forall r' > 0, X' \in \mathbf{X}^+$, ho che $(r, X + X') \succ (r, X)$ e $(r + r', X) \succ (r, X)$

Mentre le ipotesi di convessitá e di continuitá sono ipotesi tecniche, l'ipotesi di stretta monotonia traduce il fatto che un agente del mondo reale preferisca poter consumare di piú a poter consumare di meno.

Nell'insieme di tutti i possibili consumi $\mathbf{X}$, supponiamo che esista un suo sottospazio vettoriale M, ad ogni elemento X del quale possiamo associare il prezzo che l'agente é disposto a pagare al tempo 0 per usufruire del consumo X al tempo T. Chiamiamo allora **sistema di prezzi** una coppia (M, π), dove M é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{X}$, e $\pi : M \to \mathbf{R}$ é un funzionale lineare. Possiamo allora interpretare la somma $r + \pi(X)$ come il costo del piano di consumo (r, X).

Diciamo che un sistema di prezzi (M, π) é **ammissibile** (in inglese **viable**) rispetto all'agente $\succeq$ se esiste un piano di consumo (r', X') tale che:
- $r' + \pi(X') \leq 0$ (**vincolo di bilancio**)
- $\forall (r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$ tale che $r + \pi(X) \leq 0$, risulta $(r', X') \succeq (r, x)$ (**ottimalitá**)

La prima condizione si puó interpretare, supponendo che l'agente non abbia a disposizione altra ricchezza se non quella che si puó procurare agendo sul mercato, e che quindi non possa decidere di consumare indefinitamente, ma che abbia un vincolo, dato dalla prima condizione; la seconda significa che tra tutti piani di consumo realisticamente attuabili, (r', X') é quello che soddisfa maggiormente l'agente.

Diamo ora un teorema che ci consente di caratterizzare un mercato ammissibile rispetto al funzionale π. Ricordiamo che un funzionale $\pi : \mathbf{X} \to R$ si dice **positivo** se $\forall X \in \mathbf{X}^+, \pi(X) > 0$.

Definiamo inoltre l'insieme:

$$\Psi = \{\psi : \mathbf{X} \to \mathbf{R} \mid \psi \text{ lineare, continuo e positivo}\}$$

Per dimostrare il teorema useremo il seguente teorema di separazione, che é una conseguenza del teorema di Hahn-Banach:

Teorema 7.5 *: se X é uno spazio vettoriale topologico, H un cono convesso in X contenente lo 0, G un aperto convesso di X tali che $G \cap H = \emptyset$, allora esiste un funzionale $\psi \in X^*$ tale che $\psi(h) \leq 0$ $\forall h \in H$ e $\psi(g) > 0$ $\forall g \in G$.*

□

Teorema 7.6 *: dato un sistema di prezzi (M, π), allora esiste un agente $\preceq$ per cui (M, π) é ammissibile se e solo se esiste $\psi \in \Psi$ tale che $\psi|_M = \pi$.*

Dimostrazione: $\Leftarrow$) Supponiamo che esista $\psi \in \Psi$ tale che $\psi|_M = \pi$; costruiamo allora un agente $\preceq$ in questo modo: se $(r, X), (r', X') \in \mathbf{X}$, allora dico che $(r, X) \preceq (r', X')$ se $r+\psi(X) \leq r'+\psi(X')$. Allora questa relazione é transitiva e completa, poiché lo é anche $\leq$ su $\mathbf{R}$, quindi é una relazione di preferenza; verifichiamo che é convessa, continua e strettamente crescente. Per farlo definiamo gli insiemi:

$$H_{(r,X)} = \{(r', X') \mid (r', X') \succeq (r, X)\} = \{(r', X') \mid r' + \psi(X') \geq r + \psi(X)\}$$

$$G_{(r,X)} = \{(r', X') \mid (r', X') \preceq (r, X)\} = \{(r', X') \mid r' + \psi(X') \leq r + \psi(X)\}$$

Verifichiamo che $\succeq$ é convessa: $\forall (r', X'), (r'', X'') \in H_{(r,X)}$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ ho che:

$$\begin{aligned} \lambda r' + (1-\lambda) r'' + \psi(\lambda X' + (1-\lambda) X'') &= \lambda (r' + \psi(X')) + (1-\lambda)(r'' + \psi(X'')) \geq \\ &\geq \lambda (r + \psi(X)) + (1-\lambda)(r + \psi(X)) = \\ &= r + \psi(X) \end{aligned}$$

quindi $\lambda(r', X') + (1-\lambda)(r'', X'') \in H_{(r,X)}$, e $\succeq$ é convessa.

Verifichiamo che $\succeq$ é continua: a questo scopo definisco il funzionale $\tilde{\psi} : \mathbf{R} \times \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ in questo modo: $\tilde{\psi}(r, X) = r + \psi(X)$; allora $\tilde{\psi}$ é lineare e continua; allora gli insiemi:

$$H_{(r,X)} = \tilde{\psi}^{-1}([r + \psi(X), +\infty))$$

$$G_{(r,X)} = \tilde{\psi}^{-1}((-\infty, r + \psi(X)])$$

sono controimmagini di chiusi di $\mathbf{R}$, quindi chiusi, perció $\succeq$ é continua.

Verifichiamo infine che $\succeq$ é strettamente monotona: $\forall (r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}, \forall r' > 0, X' \in \mathbf{X}^+$, ho che $r + r' + \psi(X) > r + \psi(X)$; inoltre, poiché ψ é positivo, $\psi(X') > 0$, quindi $r + \psi(X + X') > r + \psi(X)$, quindi $\succeq$ é strettamente monotona.

Fin qui abbiamo dimostrato che $\succeq$ é un agente. Dobbiamo ora mostrare che esiste $(r^*, X^*) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$ ammissibile e ottimo per $\succeq$. Pongo $(r^*, X^*) = (0, 0)$; allora $(0, 0)$ é ammissibile, e $\forall (r, X) \in \mathbf{R} \times M$ tale che $r + \psi(X) \leq 0$, ho che $r + \psi(X) \leq 0 + 0 = 0 + \psi(0)$, quindi $(r, X) \leq (0, 0)$. Se chiamo $\pi = \psi|_M$, allora (M, π) é un sistema di prezzi ammissibile, e ho la tesi.

$\Rightarrow$) Supponiamo di avere un sistema di prezzi (M, π) ammissibile per l'agente $\succeq$. Ció significa che $\exists (r^*, X^*) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$ ammissibile ed ottimo; non é restrittivo supporre che $(r^*, X^*) = (0, 0)$. Definiamo ora:

$$G = \{(r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X} \mid (r, X) \succ (0, 0)\} \text{ insieme dei piani piú che ottimi}$$

$$H = \{(r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X} \mid r + \pi(X) < 0\} \text{ insieme dei piani ammissibili}$$

Notiamo che $G \cap H = \emptyset$, H é un cono convesso, G é un aperto in $\mathbf{R} \times \mathbf{X}$ (poiché é il complementare di un chiuso), ed é un convesso. Per provare questo, costruisco gli insiemi:

$$G_n = \left\{ (r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X} \;\mid\; (r, X) \succeq \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \right\}$$

Allora gli insiemi G_n sono convessi, e sono tutti contenuti in G (infatti $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \succ (0, 0)$); inoltre, $G_n \subset G_{n+1}$ $\forall n$ (infatti $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \succ \left(\frac{1}{n+1}, 0\right)$); infine, $G \subseteq \cup_1^\infty{}_n G_n$; infatti, supponiamo per assurdo che $\exists (r, X) \in G$ tale che $(r, X) \notin G_n$ $\forall n$; allora $(r, X) \not\succeq (\frac{1}{n}, 0)$ $\forall n$, e quindi, siccome $\succeq$ é completa, $(r, X) \preceq (\frac{1}{n}, 0)\ \forall n$. Siccome l'insieme $C = \{(r', X') | (r, X) \preceq (r', X')\}$ é chiuso in $\mathbf{R}\times\mathbf{X}$, e $(\frac{1}{n}, 0) \in C\ \forall n$, allora anche $\lim(\frac{1}{n}, 0) = (0, 0) \in C$, quindi $(r, X) \preceq (0, 0)$, cioé $(r, X) \notin G$, che é assurdo. Abbiamo provato che $G = \cup_1^\infty{}_n G_n$; siccome i G_n sono tutti convessi, anche G é convesso.

Possiamo allora applicare il teorema di separazione citato prima del teorema, e trovare un funzionale $\phi : \mathbf{R} \times \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ lineare e continuo tale che $\forall (r, X) \in G : \phi(r, X) > 0$ e $\forall (r, X) \in H : \phi(r, X) \leq 0$. Poiché $(1, 0) \in G$, allora $\phi(1, 0) > 0$, e possiamo definire un nuovo funzionale $\phi' : \mathbf{R} \times \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ in questo modo:

$$\phi'(r, X) = \frac{\phi(r, X)}{\phi(1, 0)}\ \forall (r, X) \in \mathbf{R} \times \mathbf{X}$$

Allora $\forall (r, X) \in G : \phi'(r, X) > 0$, $\forall (r, X) \in H : \phi'(r, X) \leq 0$, e $\phi'(1, 0) = 1$. Inoltre, poiché ϕ' é lineare, abbiamo:

$$\phi'(r, X) = r\phi'(1, 0) + \phi'(0, X) = r\phi'(1, 0) + \phi'(0, X)$$

Definiamo infine $\psi : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ come $\psi(X) = \phi'(0, X)$. Allora ψ é il funzionale cercato. Infatti é lineare e continuo per costruzione; inoltre ψ é positivo; infatti, se $X \in \mathbf{X}^+$, allora $(0, X) \succ (0, 0)$ per la stretta monotonia di $\succeq$, quindi $(0, X) \in G$ e $\psi(X) = \phi'(0, X) > 0$.

Bisogna solo dimostrare che $\psi|_M = \pi$. Per fare questo, notiamo che $\forall m \in M$:

$$(-\pi(m), m) \in H \Rightarrow \phi'(-\pi(m), m) \leq 0 \Rightarrow \psi(m) \leq \pi(m)$$
$$(\pi(m), -m) \in H \Rightarrow \phi'(\pi(m), -m) \leq 0 \Rightarrow \pi(m) \leq \psi(m)$$

quindi $\pi(m) = \psi(m)$, e questo dimostra la tesi.

Supponiamo ora di avere un sistema ammissibile di prezzi (M, π). Ci chiediamo se e sotto quali condizioni possiamo assegnare un prezzo ad un consumo $X \in \mathbf{X} \setminus M$. Diciamo che il prezzo p per X é **consistente** con (M, π) se, chiamati $M' = \{m + aX \mid m \in M, a \in \mathbf{R}\}$ e $\pi' : M' \to \mathbf{R}$ tale che $\pi'(m + aX) = \pi(m) + ap$, il sistema (M', π') é ammissibile.

□

Corollario 7.7 : *fissato $X \in \mathbf{X} \setminus M$, allora p é un prezzo consistente per X se e solo se $\exists \psi \in \Psi$ tale che $\psi|_M = \pi$ e $\psi(X) = p$.*

Corollario 7.8 : *se un sistema di prezzi (M, π) é ammissibile, allora $\forall X \in \mathbf{X} \setminus M$ esiste almeno un prezzo p consistente con (M, π).*

Questo corollario ci garantisce l'esistenza di un prezzo p consistente con (M, π) per ogni $X \in \mathbf{X}$, ma non la sua unicitá. Infatti, se considero l'insieme:

$$\Pi(X) = \{\psi(X) | \psi \in \Psi, \psi|_M = \pi\}$$

allora $\Pi(X)$ é un convesso di $\mathbf{R}$. Infatti, se $\psi, \psi' \in \Psi$ e $\psi|_M = \psi'|_M = \pi$, allora $\forall \lambda \in [0,1]$ abbiamo che $\lambda\psi + (1-\lambda)\psi' \in \Psi$ e $(\lambda\psi + (1-\lambda)\psi')|_M = \pi$, quindi:

$$(\lambda\psi + (1-\lambda)\psi')(X) = \lambda\psi(X) + (1-\lambda)\psi'(X) \in \Pi(X)$$

Poiché $\Pi(X)$ é un convesso di $\mathbf{R}$, allora é un intervallo. Niente peró ci assicura che $\Pi(X) = \{p\}$. Se questo succede (o se $X \in M$), diciamo che X é **prezzato per arbitraggio**, e p é il **prezzo per arbitraggio** di X. Il nome non é stato scelto a caso: se infatti esistessero due prezzi diversi per un consumo al tempo T, si potrebbe costruire la semplice strategia di arbitraggio:

- al tempo 0 compra al prezzo minore e vendi al prezzo maggiore

realizzando cosí un ricavo certo. Dire che un titolo é prezzato per arbitraggio, allora, significa dire che vi é un unico prezzo per cui non sono possibili arbitraggi comprendenti quel titolo.

Costruiamo ora l'insieme:

$$\hat{M} = \{X \in \mathbf{X} | X \text{ é prezzato per arbitraggio}\}$$

$\hat{M}$ é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{X}$, tale che $\overline{M} \subseteq \hat{M}$. Definisco inoltre il funzionale $\hat{\pi} : \hat{M} \to \mathbf{R}$ dato da:

$$\hat{\pi}(X) = \begin{cases} \pi(X) & \text{se } X \in M \\ \text{l'unico elemento di } \Pi(X) & \text{se } X \notin M \end{cases}$$

Lemma 7.9 *: se (M, π) é un sistema di prezzi ammissibile, anche $(\hat{M}, \hat{\pi})$ lo é.*

Dimostrazione: se (M, π) é un sistema di prezzi ammissibile, allora $\exists \psi \in \Psi$ tale che $\psi|_M = \pi = \hat{\pi}|_M$; allora, se $X \in \hat{M} \setminus M$, allora $\psi(X) \in \Pi(X) = \{\hat{\pi}(X)\}$, e quindi $\psi|_{\hat{M}} = \pi$, quindi $(\hat{M}, \hat{\pi})$ é ammissibile.

□

Corollario 7.10 *: se (m, π) é un sistema di prezzi ammissibile, allora $\hat{M}$ é un sottospazio chiuso di* $\mathbf{X}$.

Dimostrazione: se X appartiene alla chiusura di $\hat{M}$, allora esiste una successione X_n di elementi di $\hat{M}$ tale che $X_n \to X$; allora, $\forall \psi \in \Psi$ tale che $\psi|_{\hat{M}} = \hat{\pi}$, abbiamo che:

$$\psi(X) = \lim_{n\to\infty} \psi(X_n) = \lim_{n\to\infty} \hat{\pi}(X_n)$$

non dipende dal particolare ψ preso; quindi il consumo X ha un solo prezzo, uguale a $\psi(X)$ e indipendente dalla particolare scelta di ψ, quindi é prezzato per arbitraggio.

$\square$

Facciamo ora un esempio concreto di mercato.

7.7 Introduzione ai mercati finanziari

Vogliamo ora rivolgere la nostra attenzione ad un tipo particolare di mercato, comprendente, oltre alle obbligazioni, anche altri tipi di titoli, che é quello dei titoli borsistici. Un **titolo borsistico** (chiamato piú generalmente **titolo**) é un contratto trasferibile stipulato da due contraenti; tipicamente si indica con il nome di **emittente** l'ente che emette e vende il contratto, e **contraente** la persona (o l'ente) che ne viene in possesso.

Anche in questo caso, a causa della trasferibilitá, un titolo ha un prezzo che evolve nel tempo, ma la cui evoluzione non é piú certa, ma é aleatoria. A seconda del tipo di titolo, si hanno dei nomi particolari:

- si chiama obbligazione (in inglese **bond**) un contratto in cui due parti si impegnano a scambiarsi quantitá di denaro fissate in date diverse fissate. Il prezzo di una obbligazione dipende tipicamente solo dal tasso di interesse (che puó essere fissato a priori, o **indicizzato**, cioé dipendente da altre quantitá). Una tipica obbligazione é un titolo di Stato a tasso fisso (Bot, Btp sul mercato italiano) o indicizzato (Cct, Ctz sul mercato italiano), o un analogo titolo emesso da una banca.

- si chiama **azione** (in inglese **stock**) un contratto che garantisce la proprietá di una quota (generalmente molto piccola) di un'impresa quotata in borsa. Il prezzo di una azione dipende tipicamente da molti fattori aleatori.

A causa di questa distinzione, si dice spesso che le obbligazioni sono i titoli dal ricavo certo, e le azioni sono i titoli dal ricavo aleatorio. In realtá il tasso di interesse da cui dipende una obbligazione puó essere aleatorio, rendendo il prezzo dell'obbligazione aleatorio. Vedremo peró che la differente natura tra azioni e obbligazioni sará evidente nel modello che presenteremo, in quanto l'evoluzione dei prezzi dei due titoli saranno descritti da equazioni di tipo diverso.

In base ad un'altra caratteristica, si distinguono inoltre due tipi di titoli:

- titoli **a cedola nulla** (in inglese **zero coupon**): essi non garantiscono al contraente la riscossione di somme prima della scadenza del contratto. Un tipico esempio di titolo a cedola nulla é un Bot, che dá un utile solo al momento della sua scadenza.

- titoli **con cedola** (in inglese **coupon**): essi garantiscono al contraente la riscossione di somme di denaro prima della scadenza del contratto. Un tipico esempio di titolo a cedola fissa é una azione, che di solito consente la riscossione, in periodi fissati, di una somma aleatoria, chiamata **dividendo**, che é una parte del profitto dell'impresa che ha emesso l'azione.

Descriviamo ora il mercato in cui questi titoli vengono scambiati; le tre ipotesi tipiche che si fanno sui mercati, sono quelle di non frizionalitá, di competitivitá e di assenza di arbitraggi.

La definizione di mercato **non frizionale** rimane la stessa che abbiamo dato nel caso deterministico.

Un mercato si dice **competitivo** se ogni agente presente in esso :

- non ha la possibilitá di influenzare, con il solo suo comportamento, il prezzo dei titoli.

- é un **massimizzatore di profitto**, cioé, a paritá di altre condizioni, preferisce una somma maggiore di denaro ad una somma minore, quando questa condizione sia certa (o abbia probabilitá 1; ricordiamo che in questo modello, le somme di denaro non sono piú certe, ma aleatorie). In casi di indecisione non diamo qui un criterio di scelta, poiché la letteratura é ricca di diversi esempi di criteri di scelta (esempi di possibili criteri sono massimizzare la speranza, massimizzare la speranza di una particolare funzione, minimizzare la varianza tenendo la speranza fissa; ognuno di questi ha motivazioni diverse e porta a conseguenze diverse).

Definiamo infine il concetto di **arbitraggio** nel caso da noi considerato. Consideriamo una operazione finanziaria (X, t), di importi:

$$X = (X_0, ..., X_n)$$

non tutti nulli, esigibili ai tempi:

$$t = (t_0, ..., t_n)$$

tali che $t_{i-1} \leq t_i \ \forall i = 1, ..., n$, in cui peró X non é piú un vettore reale, ma é un vettore aleatorio. Diciamo che (X, t) é un **arbitraggio non rischioso**, o piú brevemente un **arbitraggio**, se $X_i \geq 0 \ \forall i$ $\mathbf{P}$-quasi certamente, e c'é almeno una operazione X_i tale che $\mathbf{P}\{X_i > 0\} > 0$. Ció significa che una delle due parti coinvolte nell'operazione ha la certezza di incassare almeno una volta senza dover mai pagare.

Un mercato si dice allora **esente da arbitraggi** se nessun agente ha la possibilitá di operare arbitraggi in esso.

7.8 Obbligazioni a cedola nulla: caso stocastico

Supponiamo di essere nell'istante s, e consideriamo una obbligazione a cedola nulla che garantisce il pagamento di una unitá monetaria al tempo $t > s$. Indichiamo con:

$$v(s,t), s < t$$

il **prezzo** del nostro titolo all'istante s. Notiamo che il valore finale del titolo é fissato. Noi supporremo peró che il prezzo possa avere delle variazioni aleatorie. Volendo fornire una spiegazione qualitativa, queste variazioni dipenderanno dal fatto che, per uno stesso tempo t, in un certo stato del mondo sará preferibile possedere del denaro in quell'istante piuttosto che una obbligazione; in altri stati, il bisogno potrebbe non essere cosí pressante, e quindi l'obbligazione avrá un valore piú alto.

Teorema 7.11 *: le variabili aleatorie $v(s,t)$, che esprimono il prezzo del titolo, devono soddisfare le seguenti quattro proprietá:*

1) $v(s,t) > 0 \ \forall s \leq t$ $\mathbf{P}$-q.c.
2) $v(s,s) = 1\mathbf{P}$-q.c.
3) $v(s,t) < 1 \ \forall s < t\mathbf{P}$-q.c.
4) $v(s,t) > v(s,T) \ \forall s \leq t < T\mathbf{P}$-q.c.

Dimostrazione: la dimostrazione del teorema é identica al caso deterministico, salvo per il fatto che la definizione di arbitraggio é diversa: per ovviare a questo problema, si fa notare che, se esistesse un evento non trascurabile in cui una di quelle proprietá fosse violata, allora si potrebbe costruire una strategia di arbitraggio mediante le costruzioni date nel caso deterministico.

□

Supponiamo sempre di essere nell'istante s, e consideriamo ora un titolo obbligazionario che garantisce il pagamento di una somma x al tempo $t > s$. Si tratta ancora di una obbligazione a cedola nulla, che si indica col nome di titolo dal **valore facciale** x. Indichiamo con:

$$V_x(s,t), s < t$$

il **prezzo** del nostro titolo all'istante s. Ancora una volta avremo un prezzo aleatorio.

Teorema 7.12 *: se il titolo unitario dal prezzo $v(s,t)$ e il titolo dal valore facciale x, dal prezzo $V_x(s,t)$, sono entrambi presenti sul mercato, allora si ha:*

$$V_x(s,t) = xv(s,t) \ \mathbf{P} - \text{q.c.}$$

Dimostrazione: la dimostrazione sfrutta lo stesso ragionamento del teorema precedente e la stessa costruzione dell'analogo caso deterministico.

□

7.9 Un modello stocastico per i mercati finanziari

Presentiamo ora un modello per i mercati finanziari. Questa volta supponiamo di avere non piú due date 0 e T, ma date variabili in $[0,T]$, che é ora il nostro insieme dei tempi, in cui possono avvenire gli scambi. Supponiamo inoltre che i beni scambiati sul mercato siano $d+1$ titoli, dal prezzo conosciuto istante per istante, di cui uno (il titolo 0) é una obbligazione, e gli altri d sono titoli azionari. Supponiamo inoltre che in $[0,T]$ non ci siano date in cui vengono pagati dei dividendi. Supponiamo infine che il mercato goda delle ipotesi di non frizionalitá, competitivitá e di assenza di arbitraggi fatte prima.

Lo spazio $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ rappresenta ancora lo stato del mondo e le informazioni che un agente assegna con probabilitá $\mathbf{P}$ al mondo. Tuttavia, le informazioni non sono conosciute tutte subito dall'agente, ma gli si rivelano man mano; per rappresentare questo fatto faremo uso di una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, con $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$ e $\mathcal{F}_T=\mathcal{F}$, tale che la $\sigma-$algebra $\mathcal{F}_t$ rappresenti le informazioni conosciute dall'agente al tempo t. Supponiamo inoltre che i prezzi dei $d+1$ titoli siano rappresentati dal processo $Z(t)=(Z_0(t),...,Z_d(t))$, adattato a $(\mathcal{F}_t)_t$ e con $Z_k(t)\in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})\ \forall t\in[0,T], k=0,...,d$.

Chiamiamo allora **modello di mercato** uno spazio probabilizzato $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$, dotato di un processo $(Z(t))_t$ adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$, con le caratteristiche sopra citate.

Supponiamo infine che il prezzo dell'obbligazione Z_0 sia identicamente uguale a 1. Quest'ultima ipotesi é un'ipotesi di comodo, che, come vedremo, verrá indebolita di parecchio nel seguito.

Gli agenti possono agire sul mercato decidendo di volta in volta quanto acquistare o vendere di ciascun titolo. Piú precisamente, chiamiamo $\theta_k(t)$ la quantitá di titolo $k-$esimo posseduta dall'agente al tempo t. Allora chiamo **strategia semplice di compravendita** un processo $(\theta(t))_t=(\theta_0(t),...,\theta_d(t))_t$ adattato a $(\mathcal{F}_t)_t$, tale che $\theta(t).Z(t)\in L^2\ \forall t\in[0,T]$, e del tipo:

$$\theta(t)=\sum_{i=0}^{N-1}\theta_i.\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}$$

con $\theta_i\mathcal{F}_{t_i}$-misurabile e $0=t_0<t_1<...<t_N=T$, rappresentante la quantitá totale di titoli posseduta dall'agente, chiamata anche **portafoglio** posseduto dall'agente (da ora in poi, il puntino indicherá sempre il prodotto scalare euclideo in $\mathbf{R}^n$).

Il fatto che la strategia sia adattata a $(\mathcal{F}_t)_t$ significa che l'agente puó **ricalibrare** il proprio portafoglio, cioé cambiarne il contenuto, in base alle informazioni ricevute fino al tempo t in cui si trova.

con $\theta_i\mathcal{F}_{t_i}$-misurabile e $0=t_0<t_1<...<t_N=T$. Notiamo che in questo caso l'agente puó ricalibrare il proprio portafoglio in un insieme finito e deterministico di date. Questo tipo di strategia é restrittivo, poiché non permette l'uso di tempi di arresto, tuttavia ci sará utile nel seguito.

Chiamiamo $\theta(t^-) = \lim_{u \to t^-} \theta(u)$ (che esiste sempre poiché $(\theta(t))_t$ é cádlág). Allora, se $(\theta(t))_t$ é una strategia semplice, avremo che $\theta(t_i^-) = \theta(t_{i-1})$.

Chiamiamo **valore di mercato** del portafoglio all'istante t la quantitá $\theta(t).Z(t)$.

Diciamo che una strategia $(\theta(t))_t$ é **autofinanziante** se il suo valore di mercato immediatamente prima dell'istante t é uguale al suo valore all'istante t, cioé:

$$\theta(t^-).Z(t) = \theta(t).Z(t) \ \forall t \in [0, T]$$

Dire che una strategia é autofinanziante significa allora che ogni ricalibratura del portafoglio deve essere fatta sfruttando esclusivamente le risorse interne del portafoglio stesso, e che non é possibile mettere o togliere titoli dall'esterno in altro modo, eccetto alle date 0 e T. Notiamo che il valore di mercato immediatamente prima dell'istante t viene calcolato usando i prezzi in t. Questo perché l'agente decide le proprie azioni al tempo t, e deve quindi usare i prezzi in t e il portafoglio posseduto immediatamente prima.

Definiamo ora un tipo particolare di arbitraggio, che verrá largamente usato in seguito. Chiamiamo **pasto gratis semplice** (in inglese **simple free lunch**) una strategia semplice autofinanziante tale che $\theta(0).Z(0) \leq 0$ e $\theta(T).Z(T) \in \mathbf{X}^+$. L'esistenza di pasti gratis semplici nel mercato é quindi incompatibile con l'ipotesi di assenza di arbitraggi da noi fatta all'inizio.

Ci poniamo ora il problema: dato un consumo $X \in \mathbf{X}$, é possibile trovare una strategia semplice autofinanziante $(\theta(t))_t$ tale che $\theta(T).Z(T) = X$? Se questo accade, diciamo che X é **acquistabile** al tempo 0; diciamo inoltre che $(\theta(t))_t$ **genera** X (o anche **replica** o **simula**), e che $\theta(0).Z(0)$ (che, poiché $\mathcal{F}_0$ é la $\sigma-$algebra banale, é una costante) é un prezzo di X al tempo 0. Per ora, infatti, niente ci assicura che per un titolo acquistabile non ci siano due diverse strategie che lo generano, con due prezzi diversi per X al tempo 0.

Lemma 7.13 : *se nel modello di mercato non ci sono pasti gratis semplici, allora ogni consumo $X \in \mathbf{X}$ acquistabile al tempo 0 ha un unico prezzo.*

Dimostrazione: supponiamo per assurdo che esistano due strategie autofinanzianti θ e θ', tali che $\theta(0).Z(0) < \theta'(0).Z(0)$ che simulano X. Definiamo allora la strategia $\theta''(t) = \theta(t) - \theta'(t)$. Allora θ'' é semplice, (tale che $\theta''(t^-) = \theta(t^-) - \theta'(t^-)$ e autofinanziante; infatti:

$$\begin{aligned} \theta''(t^-).Z(t) &= (\theta(t^-) - \theta'(t^-)).Z(t) = \theta(t^-).Z(t) - \theta'(t^-).Z(t) = \\ &= \theta(t).Z(t) - \theta'(t).Z(t) = \theta''(t).Z(t) \end{aligned}$$

Risulta inoltre che:

$$\theta''(0).Z(0) = \theta(0).Z(0) - \theta'(0).Z(0) < 0$$

$$\theta''(T).Z(T) = \theta(T).Z(T) - \theta'(T).Z(T) = X - X = 0$$

Siamo allora in presenza di un arbitraggio, che peró non é ancora un pasto gratis semplice. Possiamo peró modificarlo in questo modo:

$$\theta'''(t) = \theta''(t) - (\theta''(0).Z(0))(1, 0, ..., 0) = (\theta_0''(t) - \theta''(0).Z(0), \theta_1(t), ..., \theta_d(t))$$

Ricordando che $Z_0(t) = 1$ $\forall t \in [0, T]$, deduciamiamo che:

$$\theta'''(0).Z(0) = \theta''(0).Z(0) - (\theta''(0).Z(0)).Z_0(0) = 0$$
$$\theta'''(T).Z(T) = \theta''(T).Z(T) - (\theta''(0).Z(0)).Z_0(T) = -\theta''(0).Z(0) > 0$$

quindi θ''' é un pasto gratis semplice, che, dalle ipotesi fatte, non poteva esistere nel mercato.

Se $\theta(0).Z(0) > \theta'(0).Z(0)$, si definisce $\theta'' = \theta' - \theta$ e si procede analogamente.

□

Chiamiamo M il sottoinsieme di $\mathbf{X}$ dei consumi al tempo T acquistabili al tempo 0. Se il modello di mercato é privo di pasti gratis semplici, per il lemma precedente possiamo definire un funzionale $\pi : M \to \mathbf{R}$ come $\pi(X) = \theta(0).Z(0)$, dove θ é una qualsiasi strategia semplice autofinanziante che replica X.

Lemma 7.14 *: se il modello di mercato é privo di pasti gratis semplici, allora (M, π) é un sistema di prezzi.*

Dimostrazione: mostriamo innanzitutto che M non é vuoto: infatti $0 \in M$, poiché é generato dalla strategia $\theta(t) = 0$. Inoltre M é uno spazio vettoriale, e π é lineare su M. Infatti, se $X, X' \in M$ sono generati rispettivamente da θ e θ', allora $\forall a, b \in \mathbf{R}$, la strategia $a\theta + b\theta'$ é autofinanziante, e genera $aX + bX'$, quindi $aX + bX' \in M$ e:

$$\begin{aligned}\pi(aX + bX') &= (a\theta(0) + b\theta'(0)).Z(0) = a\theta(0).Z(0)) + b\theta'(0).Z(0) = \\ &= a\pi(X) + b\pi(X')\end{aligned}$$

quindi π é lineare.

□

Diciamo che un modello di mercato é **ammissibile** se é privo di pasti gratis semplici ed ha un sistema di prezzi (M, π) ammissibile.

Il prossimo teorema dá una caratterizzazione dei modelli di mercato ammissibili, ed il risultato dipendente da questo é quello che caratterizza la Finanza moderna. Per il seguito, si intenderá come "misura di martingala equivalente" una misura equivalente a $\mathbf{P}$ che rende una martingala il processo $(Z(t))_t$.

Teorema 7.15 *: se un modello di mercato é privo di pasti gratis semplici, allora c'é una corrispondenza biunivoca tra l'insieme:*

$$\{\mathbf{P}^* \in M_1^+(\Omega) | \mathbf{P}^* \text{ é una mis. di mart. eq. a } \mathbf{P} \text{ con dens.} \rho \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})\}$$

e l'insieme:

$$\{\psi \in \Psi | \psi|_M = \pi\}$$

data da:

$$\mathbf{P}^*(B) = \psi(\mathbf{1}_B) \ \forall B \in \mathcal{F}$$

$$\psi(X) = E_{\mathbf{P}^*}[X] \ \forall X \in \mathbf{X}$$

Dimostrazione: supponiamo che $\mathbf{P}^*$ sia una misura equivalente di martingala con densitá $\rho \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Definiamo allora $\psi : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ tale che $\psi(X) = E_{\mathbf{P}^*}[X]$. Questa é una buona definizione; infatti $\forall X \in \mathbf{X}$ si ha:

$$E_{\mathbf{P}^*}[X] = E_{\mathbf{P}}[\rho X] \leq \sqrt{E_{\mathbf{P}}[\rho^2]}.\sqrt{E_{\mathbf{P}}[X^2]} < +\infty$$

Allora ψ é lineare, continua (infatti $\psi(X) \leq \|\rho\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})}.\|X\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})} \ \forall X \in \mathbf{X}$); inoltre ψ é positiva; infatti, se $X \in \mathbf{X}^+$, allora $\mathbf{P}\{X > 0\} = \delta > 0$, quindi $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\mathbf{P}\{X > \varepsilon\} \geq \frac{\delta}{2}$, e $\psi(X) = E_{\mathbf{P}^*}[X] \geq \delta\varepsilon > 0$. Vediamo infine che $\psi|_M = \pi$. Se $X \in M$, allora esiste una strategia semplice autofinanziata θ che simula X e tale che $\theta(0).Z(0) = \pi(X)$. Poiché $(Z(t))_t$ é una $\mathbf{P}^*$-martingala,si ha che $\forall i = 0, ..., N-1$:

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{P}^*}[\theta(t_i).Z(t_i)|\mathcal{F}_{t_{i-1}}] &= E_{\mathbf{P}^*}[\theta(t_{i-1}).Z(t_i)|\mathcal{F}_{t_{i-1}}] = \\ &= \theta(t_{i-1})E_{\mathbf{P}^*}[Z(t_i)|\mathcal{F}_{t_{i-1}}] = \theta(t_{i-1}).Z(t_{i-1}) \end{aligned}$$

Allora:

$$E_{\mathbf{P}^*}[\theta(t_i).Z(t_i)] = E_{\mathbf{P}^*}[E_{\mathbf{P}^*}[\theta(t_i).Z(t_i)|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]] = E_{\mathbf{P}^*}[\theta(t_{i-1}).Z(t_{i-1})]$$

quindi:

$$\psi(X) = E_{\mathbf{P}^*}[\theta(T).Z(T)] = E_{\mathbf{P}^*}[\theta(0).Z(0)] = \pi(X)$$

e abbiamo una parte della tesi.

Viceversa, supponiamo che $\psi \in \Psi$ sia tale che $\psi|_M = \pi$. Definiamo allora $\mathbf{P}^*(B) = \psi(\mathbf{1}_B) \ \forall B \in \mathcal{F}$.

Verifichiamo che questa funzione d'insieme é una misura di probabilitá: $\mathbf{P}^*(\emptyset) = \psi(0) = 0$, $\mathbf{P}^*(\Omega) = \psi(1) = 1$ (poiché una strategia replicante $\mathbf{1}_\Omega$ é $\theta(t) = (1, 0, ...0) \ \forall t$, che ha quindi prezzo 1); inoltre, poiché ψ é positivo, e le indicatrici sono non negative, allora $\mathbf{P}^*(B) \geq 0 \; \forall B \in \mathcal{F}$.

Rimane da verificare che $\mathbf{P}^*$ é $\sigma-$additiva; se $(B_n)_n$ é una successione di eventi disgiunti, allora, poiché ψ é lineare e continua, si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^*\left(\cup_1^\infty {}_n B_n\right) &= \psi(\mathbf{1}_{\cup_1^\infty {}_n B_n}) = \psi(\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\cup_1^n {}_i B_i}) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \psi(\mathbf{1}_{\cup_1^n {}_i B_i}) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n {}_i \psi(\mathbf{1}_{B_i}) = \sum_1^\infty {}_n \mathbf{P}^*(B_n)
\end{aligned}$$

quindi $\mathbf{P}^*$ é una misura di probabilitá.

Verifichiamo ora che $\mathbf{P}^*$ é equivalente a $\mathbf{P}$ e che la sua densitá é a quadrato integrabile. Se $\mathbf{P}(B) = 0$, allora $\mathbf{1}_B = 0$ q. c., e quindi $\mathbf{P}^*(B) = \psi(\mathbf{1}_B) = 0$. Viceversa, se $\mathbf{P}(B) > 0$, allora $\mathbf{1}_B \in \mathbf{X}^+$ e, siccome ψ é positivo, $\mathbf{P}^*(B) = \psi(\mathbf{1}_B) > 0$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz, poiché ψ é lineare e continuo, allora $\exists \rho \in \mathbf{X}$ tale che $\psi(X) =< \rho, X >_{\mathbf{X}} = E_{\mathbf{P}}[\rho.X] \; \forall X \in \mathbf{X}$, quindi $\psi(\mathbf{1}_B) = E_{\mathbf{P}^*}[\mathbf{1}_B] = E_{\mathbf{P}}[\rho.\mathbf{1}_B]$, quindi la densitá di $\mathbf{P}^*$ rispetto a $\mathbf{P}$ é proprio $\rho \in \mathbf{X} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Verifichiamo infine che $(Z(t))_t$ é una $\mathbf{P}^*-$martingala; $(Z_0(t))_t = 1$ é ovviamente una martingala; verifichiamo ora che $(Z_k(t))_t$ é una $\mathbf{P}^*-$martingala $\forall k$. A tal fine consideriamo un evento $B \in \mathcal{F}_s$, con $0 \leq s < t \leq T$, e costruiamo la strategia semplice autofinanziante:

$$\theta(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq u < s \\ (-Z_k(s)\mathbf{1}_B, 0, ..., \mathbf{1}_B, ..., 0) & \text{se } s \leq u < t (\mathbf{1}_B \quad \text{nel } k - \text{esimo posto} \\ ((Z_k(t) - Z_k(s))\mathbf{1}_B, 0, ..., 0) & \text{se } t \leq u \leq T \end{cases}$$

Allora $\theta(0).Z(0) = 0$ e $\theta(T).Z(T) = (Z_k(t) - Z_k(s))\mathbf{1}_B$, quindi il consumo $(Z_k(t) - Z_k(s))\mathbf{1}_B$ é acquistabile al tempo 0 a costo 0. Notiamo inoltre che, per come abbiamo costruito la probabilitá $\mathbf{P}^*$, $\psi(X) = E_{\mathbf{P}^*}X] \; \forall X \in \mathbf{X}$. Si dovrá quindi avere:

$$E_{\mathbf{P}^*}[(Z_k(t) - Z_k(s))\mathbf{1}_B] = \psi((Z_k(t) - Z_k(s))\mathbf{1}_B) = \pi((Z_k(t) - Z_k(s))\mathbf{1}_B) = 0$$

quindi:

$$\int_B Z_k(t) \; d\mathbf{P}^* = \int_B Z_k(s) \; d\mathbf{P}^*$$

Siccome B era un qualsiasi elemento della tribú $\mathcal{F}_s$, questo significa che $E_{\mathbf{P}^*}[(Z_k(t)|\mathcal{F}_s] = Z_k(s) \; \forall s < t$, e quindi $(Z_k(t))_t$ é una $\mathbf{P}^*-$martingala.

Rimane da verificare che la corrispondenza é biunivoca. Se costruisco una misura di probabilitá $\mathbf{P}^*$ a partire da un funzionale ψ nel modo usato nel teorema, e poi costruisco un funzionale ψ' dalla probabilitá, allora ho che:

$$\psi'(\mathbf{1}_B) = E_{\mathbf{P}^*}[\mathbf{1}_B] = \mathbf{P}^*(B) = \psi(\mathbf{1}_B) \; \forall B \in \mathcal{F}$$

siccome le indicatrici sono dense in $\mathbf{X}$, allora $\psi' = \psi$. Viceversa, se dalla misura $\mathbf{P}^*$ costruisco un funzionale ψ e da questo costruisco una misura $\mathbf{P}^{**}$, allora abbiamo:

$$\mathbf{P}^{**}(B) = \psi(\mathbf{1}_B) = E_{\mathbf{P}^*}[\mathbf{1}_B] = \mathbf{P}^*(B)\ \forall B \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbf{P}^{**} = \mathbf{P}^*$$

e abbiamo quindi la tesi.

□

Corollario 7.16 : *un modello di mercato é ammissibile se e solo se ammette almeno una misura equivalente di martingala.*

Dimostrazione: se il mercato é ammissibile, significa che non ammette pasti gratis semplici, e che esiste un funzionale lineare e continuo ψ tale che $\psi|_M = \pi$. Per il teorema precedente, esiste una misura equivalente di martingala. Viceversa, se esiste una misura equivalente di martingala $\mathbf{P}^*$, allora non ci possono essere pasti gratis semplici. Infatti, per ogni strategia semplice autofinanziante θ tale che $X = \theta(T).Z(T) \in \mathbf{X}^+$, abbiamo che $\mathbf{P}\{X > 0\} > 0$, quindi $\mathbf{P}^*\{X > 0\} > 0$, e quindi:

$$\theta(0).Z(0) = \pi(X) = \psi(X) = E_{\mathbf{P}^*}[X] > 0$$

ció significa che non ci possono essere pasti gratis semplici; il teorema ci dice allora che esiste un funzionale lineare e continuo la cui restrizione a M é π, e quindi il mercato é ammissibile.

□

Se chiamiamo $\mathcal{P}$ l'insieme delle misure equivalenti di martingala per il mercato, il corollario precedente significa che il mercato é ammissibile se e solo se $\mathcal{P} \neq \emptyset$.

Se ora chiamiamo $\hat{M}$ il sottospazio di $\mathbf{X}$ dei consumi al tempo T prezzati per arbitraggio, e $\hat{\pi}$ l'estensione di π ad $\hat{M}$, che abbiamo visto essere unica nel caso di un mercato ammissibile, allora abbiamo il seguente:

Corollario 7.17 : *se il modello di mercato é ammissibile, allora $X \in \hat{M}$ se e solo se $E_{\mathbf{P}^*}[X]$ é lo stesso $\forall \mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$; in questo caso, $E_{\mathbf{P}^*}[X] = \hat{\pi}(X)\ \forall \mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$.*

Dimostrazione: se il modello di mercato é ammissibile, allora il sistema di prezzi $(\hat{M}, \hat{\pi})$ é ammissibile; allora $\forall \mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$ posso trovare uno $\psi \in \Psi$ tale che $\psi|_{\hat{M}} = \hat{\pi}$, e $E_{\mathbf{P}^*}[X] = \psi(X) = \hat{\pi}(X)\ \forall X \in \hat{M}$. Viceversa, se $\forall \mathbf{P}^* \in \mathcal{P}$ ho che $E_{\mathbf{P}^*}[X]$ é lo stesso, allora $\forall \psi \in \Psi$ che estende $\hat{\pi}$, $E_{\mathbf{P}^*}[X] = \psi(X)$ non dipende dal particolare ψ scelto, e quindi X é prezzato per arbitraggio.

□

Corollario 7.18 : *se il modello di mercato é ammissibile, allora $\hat{M} = X$ se e solo se $\mathcal{P}$ ha solo un elemento.*

Dimostrazione: supponiamo che il modello di mercato sia ammissibile; se $\mathcal{P}$ ha solo un elemento, allora anche l'insieme dei funzionali $\psi \in \Psi$ estendenti π ha solo un elemento, e quindi tutti i consumi $X \in \mathbf{X}$ sono prezzati per arbitraggio, quindi $\hat{M} = X$. Viceversa, se $\hat{M} = X$, allora ogni funzionale $\psi \in \Psi$ che estende π assume lo stesso valore su ogni $X \in \mathbf{X}$, e quindi esiste solo uno di questi funzionali, e quindi $\mathcal{P}$ ha solo un elemento.

□

Quando questo si verifica, tutti i possibili consumi presenti sul mercato possono essere prezzati mediante arbitraggio; si dice allora che il mercato é **completo**.

7.10 Modello di mercato con prezzi dei titoli continui

Supponiamo di avere un mercato composto da $d+1$ titoli, il cui prezzo é descritto dai processi stocastici $S_0(t), ..., S_d(t)$. Supponiamo che il titolo 0 sia un'obbligazione, e i titoli da 1 a d siano azioni. Abbandoniamo l'ipotesi che $S_0(t) = 1$ identicamente, e supponiamo che i prezzi evolvano con continuitá; inoltre, supponiamo che il prezzo del titolo 0 dipenda solo da un processo $(r(t))_t \in \Lambda^1_W$, che chiamiamo **spot rate**, e che per ora supponiamo noto, in modo che l'equazione che descrive S_0 sia del tipo:

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)\ dt$$

dove $S_0(0) = 1$. Vedremo poi che ci sono diversi modelli per $r(t)$. I prezzi degli altri titoli soddisfano invece equazioni del tipo:

$$dS_i(t) = b_i(t)S_i(t)\ dt + S_i(t)\sum_j \sigma_{ij}(t)\ dW_j(t)$$

dove $(b_i(t))_t \in \Lambda^1_W$, $(\sigma_{ij}(t))_t \in \Lambda^2_W$ e $(W(t))_t$ é un moto browniano standard k-dimensionale. Notiamo subito che queste sono equazioni lineari, per cui esiste un'unica soluzione, data da:

$$S_0(t) = e^{\int_0^t r(u)\ du}$$

$$S_i(t) = S_i e^{\int_0^t (b_i(u) - \frac{1}{2}\sum_j \sigma^2_{ij}(u))\ du + \sum_j \int_0^t \sigma_{ij}(u)\ dW_j(u)}$$

Chiamiamo $(\theta(t))_t$ il processo rappresentante la strategia di portafoglio; allora la ricchezza al tempo t é data da:

$$X(t) = \sum_i S_i(t)\theta_i(t) = S(t).\theta(t)$$

Vogliamo ricondurci al caso trattato prima, in cui i processi dei prezzi dei titoli erano delle martingale.

Costruiamo il nuovo processo di prezzi:

$$Z(t) = \frac{S(t)}{S_0(t)} = \left(\frac{S_0(t)}{S_0(t)}, \frac{S_1(t)}{S_0(t)}, ..., \frac{S_d(t)}{S_0(t)}\right)$$

allora il titolo non rischioso é identicamente uguale a 1 come prima, e i nuovi titoli soddisfano le equazioni:

$$dZ_i(t) = (b_i(t) - r(t))Z_i(t)\ dt + Z_i(t)\sum_j \sigma_{ij}(t)\ dW_j(t),\ \ i = 1, ..., d$$

Vogliamo ora trovare una misura $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$ tale che questi processi siano delle martingale. Ricordiamo che nella parte relativa al teorema di Girsanov, sotto opportune ipotesi si poteva costruire un processo $(\tilde{W}(t))_t$ ed una misura di martingala equivalente per il processo $(Z(t))_t$.

Lemma 7.19 : *se $d = k$ (cioé il numero dei titoli rischiosi é uguale al numero dei moti browniani), $\sigma(t)$ invertibile $\mathbf{P}$-q.c. $\forall t \in [0, T]$, $\int_0^T \|\sigma^{-1}(b(t) - r(t)(1, ..., 1))\|\ dt \leq K$, (dove $\|.\|$ é la norma euclidea su $\mathbf{R}^n$), allora il processo:*

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \sigma^{-1}(t)(b(t) - r(t)(1, ..., 1))\ dt$$

é un moto browniano rispetto alla probabilitá $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$ e definita da:

$$\mathbf{P}^* = e^{-\int_0^T \sigma^{-1}(t)(b(t)-r(t)(1,...,1))\ dW(t) - \frac{1}{2}\int_0^T \|\sigma^{-1}(t)(b(t)-r(t)(1,...,1))\|^2\ dt}.\mathbf{P}$$

Se facciamo l'ulteriore ipotesi che $(\sigma_t)_t \in M^2_{\tilde{W}}$, allora i prezzi dei titoli soddisfano le equazioni:

$$dZ_i(t) = Z_i(t)\sum_j \sigma_{ij}(t)\ d\tilde{W}_j(t), i = 1, ..., d$$

che hanno come soluzioni esplicite:

$$Z_i(t) = S_i e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \sum_j \sigma_{ij}^2(u))\ du + \sum_j \int_0^t \sigma_{ij}(u)\ dW_j(u)}$$

Dimostrazione: la dimostrazione segue banalmente dal lemma (4.9) e dalla formula di risoluzione delle equazioni lineari (5.5).

□

7.11 Valutazione dei titoli derivati

Vogliamo ora caratterizzare i consumi $X \in \mathbf{X}$ acquistabili al tempo 0. In particolare, vedremo delle ipotesi sufficienti sotto cui il mercato é completo, e quindi ogni consumo $X \in \mathbf{X}$ é simulabile, e quindi acquistabile al tempo 0. Per fare questo ricordiamo che avevamo definito una strategia semplice autofinanziante $(\theta(t))_t$ come un processo adattato a $(\mathcal{F}_t)_t$, tale che $\theta(t).Z(t) \in L^2 \ \forall t \in [0,T]$, del tipo:

$$\theta(t) = \sum_{0}^{N-1} i\theta_i.\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}$$

con $\theta_i \mathcal{F}_{t_i}$-misurabile e $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ e tale che: $\theta(t_{i-1}).Z(t_i) = \theta(t_i).Z(t_i) \ \forall t \in [0,T]$. Questo tipo di strategia é tale che, se definisco il **valore del portafoglio** come il processo $(V(t))_t$ dato da $V(t) = \theta(t).S(t)$, e $(\theta_0(t) \in \Lambda_W^1$, $(\theta_i(t) \in \Lambda_W^2 \ \forall i = 1,...,d$, allora $dV(t) = \theta(t)\ dS(t)$. Questo in virtú del seguente:

Lemma 7.20 *: se $(\theta(t))$ é una strategia semplice autofinanziante tale che $(\theta_0(t))_t \in \Lambda_W^1$, $(\theta_i(t))_t \in \Lambda_W^2 \ \forall i = 1,...,d$, allora $dV(t) = \theta(t)\ dS(t)$.*

Dimostrazione: supponiamo che:

$$\theta(t) = \sum_k \theta^{(k)} \mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1})}(t)$$

se calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \theta(u)\ dS(u) &= \int_0^t \theta_0(u) r(u) S_0(u)\ du + \int_0^t (\sum_i \theta_i(u) b_i(u) S_i(u))\ du + \\
&\quad + \sum_{ij} \int_0^t \theta_i(u) S_i(u) \sigma_{ij}\ dW_j(u) = \\
&= \sum_k \theta_0^{(k)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} r(u) S_0(u)\ du + \\
&\quad + \sum_{ki} \theta_i^{(k)}. \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \theta_i(u) b_i(u) S_i(u))\ du + \sum_j S_i(u) \sigma_{ij}\ dW_j(u) \right) = \\
&= \sum_k \theta_0^{(k)} (S_0(t_{k+1}) - S_0(t_k)) + \sum_{ki} \theta_i^{(k)} (S_i(t_{k+1}) - S_i(t_k)) = \\
&= \sum_k (\sum_{i=0}^n \theta_i^{(k+1)} S_i(t_{k+1}) - \theta_i^{(k)} S_i(t_k)) = V(t) - V(0)
\end{aligned}$$

abbiamo la tesi.

□

Possiamo allora dare una definizione piú generale di strategia autofinanziante: una **strategia autofinanziante** é un processo $(\theta(t))_t$ $(d+1)$-dimensionale tale che:

1) $(\theta_0(t))_t \in \Lambda^1_W$, $(\theta_i(t))_t \in \Lambda^2_W$
2) $V(t) = V(0) + \int_0^t \theta(t)\ dS(t)$

Definiamo ora il processo $\tilde{S}(t) = S_0^{-1}(t)$; notiamo allora che $d\tilde{S}(t) = -r(t)\tilde{S}(t)\ dt$; siccome $(r(t))_t \in \Lambda^1_W$, allora $(\tilde{S}(t))_t$ é un processo continuo, e in particolare appartiene a Λ^2_W. Notiamo inoltre che $Z(t) = S(t).\tilde{S}(t)$. Se chiamiamo **valore del portafoglio attualizzato** il processo $\tilde{V}(t) = \tilde{S}(t).V(t)$, allora vale la seguente:

Proposizione 7.21 *: se $(\theta(t))_t$ é un processo tale che $(\theta_0(t))_t \in \Lambda^1_W$, $(\theta_i(t))_t \in \Lambda^2_W$, allora $(\theta(t))_t$ é una strategia autofinanziante se e solo se:*

$$d\tilde{V}(t) = \sum_{i=1}^{d} \theta_i(t).dZ_i(t)$$

Dimostrazione: se supponiamo che $(\theta(t))_t$ sia una strategia autofinanziante, allora per la regola di moltiplicazione dei differenziali stocastici abbiamo:

$$\begin{aligned} d\tilde{V}(t) &= \tilde{S}(t)\ dV(t) + V(t)\ d\tilde{S}(t) = \theta(t)\tilde{S}(t)\ dS(t) - \theta(t).S(t)r(t)\tilde{S}(t)\ dt = \\ &= \theta(t)(\tilde{S}(t)\ dS(t) - S(t)r(t)\tilde{S}(t)\ dt) = \theta(t)\ dZ(t) \end{aligned}$$

L'implicazione inversa si ricava in modo analogo.

□

Diciamo che una strategia é **ammissibile** se é autofinanziante ed é tale che $\tilde{V}(t) = \tilde{S}(t).V(t) \in \mathbf{X}^+\ \forall t$.

Diamo ora una definizione piú generale di consumo acquistabile in 0. Un consumo $X \in \mathbf{X}$ si dice **acquistabile** al tempo 0 (o **simulabile**) se esiste una strategia ammissibile tale che $X = \theta(T).Z(T)$. Poiché il consumo X viene simulato mediante i titoli $Z(t)$ presenti sul mercato, spesso si usa per X il nome di **titolo derivato**.

Teorema 7.22 *: sotto le ipotesi in cui il processo $Z(t)$ é una $\mathbf{P}$-martingala, e l'ulteriore ipotesi che $\|\sigma^{-1}(t)\| \leq K\ \forall t$ (dove con $\|A\|$ si intende il massimo degli autovalori di A), allora ogni consumo $X \in \mathbf{X}^+$ é simulabile, ed il valore all'istante t del portafoglio simulante il consumo é:*

$$V(t) = E_{\mathbf{P}^*}[\tilde{S}_0(t).X|\mathcal{F}'_t]$$

dove $(\mathcal{F}'_t)_t$ é la filtrazione naturale del moto browniano $(\tilde{W}(t))_t$.

Dimostrazione: cerchiamo una strategia ammissibile $(\theta_0(t), \theta(t))_t$, dove da ora in poi intenderemo sempre $\theta(t) = (\theta_1(t), ..., \theta_d(t))$. Supponiamo che $(\theta_0(t), \theta(t))_t$ sia ammissibile; avremo allora:

$$V(t) = \theta_0(t)S_0(t) + \theta(t).S(t)$$

attualizziamo e troviamo che:

$$\tilde{V}(t) = \theta_0(t) + \theta(t).Z(t)$$

allora, per la proposizione precedente:

$$\tilde{V}(t) = \tilde{V}(0) + \int_0^t \sum_i \theta_i(u)\ dZ_i(u) = \tilde{V}(0) + \int_0^t \sum_{ij} \theta_i(u)Z_i(u)\sigma_{ij}\ d\tilde{W}_j(u)$$

allora $(V_t)_t$ dovrá essere una $\mathbf{P}^*$-martingala adattata alla filtrazione naturale di $(\tilde{W}_(t))_t$.

Costruiamo ora la strategia: notiamo che, se chiamiamo $(\mathcal{F}'_t)_t$ la filtrazione naturale del moto browniano $(\tilde{W}(t))_t$, allora la quantitá

$$E_{\mathbf{P}^*}[\tilde{S}_0(t).X|\mathcal{F}'_t]$$

é una $\mathbf{P}^*$-martingala adattata a $(\mathcal{F}'_t)_t$; allora, per il teorema di rappresentazione delle martingale, esiste un processo $(H_t)_t \in M^2_{\tilde{W}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}^*; \mathbf{R}^d)$ tale che

$$E_{\mathbf{P}^*}[\tilde{S}_0(t).X|\mathcal{F}'_t] = E_{\mathbf{P}^*}[\tilde{S}_0(0).X] + \int_0^t H(u)\ d\tilde{W}(u)\ \forall t$$

Siccome vogliamo che $\tilde{V}(T) = \tilde{S}_0(t).X$ e che $(\tilde{V}(t))_t$ sia una martingala, avremo:

$$\tilde{V}(t) = E_{\mathbf{P}^*}[\tilde{S}_0(t).X|\mathcal{F}'_t]$$

e quindi:

$$\tilde{V}(t) = \tilde{V}(0) + \int_0^t H(u)\ dW(u)\ \forall t$$

allora dovrá essere soddisfatta la seguente uguaglianza:

$$H_j(t) = \sum_i \theta_i(t)Z_i(t)\sigma_{ij}\ \forall t$$

che, scritta in forma vettoriale diventa:

$$H(t) = \sigma(t)(\theta(t).Z(t))$$

dove qui peró $\theta.Z = (\theta_1.Z_1, ..., \theta_d.Z_d)$. allora, per trovare la strategia poniamo:

$$\sigma^{-1}(t)H(t) = \theta(t).Z(t)$$

e infine:

$$\theta_i(t) = \frac{\sigma^{-1}(t)H(t)|_i}{Z_i(t)}$$

allora $(Z_i(t))_t$ é un processo continuo e sempre positivo (se si parte da dati iniziali positivi), quindi é limitato; se poi $\|\sigma^{-1}(t)\| \leq K \ \forall t$ allora θ_i appartiene a $\Lambda^2_{\tilde{W}}$. Infine il processo $\theta_0(t) = E_{\mathbf{P}^*}[\tilde{S}_0(t).X|\mathcal{F}'_t] - \theta(t).Z(t)$ é tale che il processo $(\theta_0(t), \theta(t))_t$ é una strategia ammissibile.

□

Corollario 7.23 : *sotto le ipotesi del teorema, il mercato é completo.*

□

7.12 Modello di Black-Scholes

Il seguente modello é storicamente il primo modello apparso nella letteratura a dare una formula esplicita per il calcolo di particolari titoli derivati, chiamati opzioni, la cui trattazione avverrá in seguito. La sua peculiaritá é che i coefficienti delle equazioni descriventi i prezzi dei titoli sono costanti. Infatti i prezzi dei titoli sono descritti dalle equazioni:

$$dS_0(t) = S_0(t)r\ dt$$

$$dS_i(t) = S_i(t)b_i\ dt + S_i(t)\sum_j \sigma_{ij}\ dW_j(t),\ \ i = 1, ..., d$$

dove $r > 0$, $b \in \mathbf{R}^n$ e $\sigma_i \in M(d, k, \mathbf{R})$ é di rango massimo. Se chiamo $S = (S_0, ..., S_d)$ i prezzi dei titoli al tempo 0, allora queste equazioni hanno soluzioni esplicite:

$$S_0(t) = S_0 e^{rt}$$

$$S_i(t) = S_i e^{\sigma_i W_i(t) + (b_i - \frac{\sigma_i^2}{2})t} i = 1, ..., d$$

Notiamo allora che il logaritmo della variabile aleatoria $S_i(t)$ é una variabile aleatoria gaussiana; si dice allora che $S_i(t)$ ha **legge log-normale**. Il pregio di questo modello é che si possono ricavare formule esplicite per molte quantitá utili in pratica (come vedremo meglio quando studieremo le opzioni).

Ripetendo il procedimento usato per il caso generale, otteniamo il nuovo processo:

$$Z(t) = \frac{S(t)}{S_0(t)} = \left(1, \frac{S_1(t)}{S_0(t)}, ..., \frac{S_d(t)}{S_0(t)}\right)$$

che soddisfa le equazioni:

$$dZ_i(t) = (b_i - r)Z_i(t)\ dt + Z_i(t)\sum_j \sigma_{ij}\ dW_j(t), i = 1, ..., d$$

Se $k = d$ (cioé il numero dei titoli rischiosi é uguale al numero dei moti browniani), allora, poiché σ é di rango massimo, é invertibile; allora tutte le ipotesi del lemma (?) sono soddisfatte, e la misura $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$ tale che $(Z(t))_t$ é una martingala é:

$$\mathbf{P}^* = e^{-\sigma^{-1}(b-r(1,...,1))\ dW(T) - \frac{1}{2}||\sigma^{-1}(b-r(1,...,1))^2||^2 T}.\mathbf{P}$$

ed il moto browniano $(\tilde{W}(t))_t$ diventa:

$$\tilde{W}_i(t) = W(t) + \frac{b_i - r}{\sigma_i}t$$

I prezzi dei titoli soddisfano allora le equazioni:

$$dZ_i(t) = Z_i(t)\sum \sigma_{ij}\ d\tilde{W}_j(t), i = 1, ..., d$$

le cui soluzioni esplicite é:

$$Z_i(t) = S_i e^{\sum_j \sigma_{ij}\tilde{W}_j(t) - \frac{1}{2}\sum_j \sigma_{ij}^2 t},\ \ i = 1, ..., d$$

Se ora controlliamo quali consumi sono simulabili, scopriamo che, se σ é invertibile, allora le ipotesi della proposizione (7.22) sono verificate, quindi tutti i consumi $X \in \mathbf{X}$ sono simulabili, ed il valore del portafogli simulante é uguale a:

$$V(t) = E_{\mathbf{P}^*}[e^{-r(T-t)}X|\mathcal{F}_t]$$

7.13 Valutazione delle opzioni europee

Rivolgiamo ora la nostra attenzione a particolari esempi di titoli derivati, la cui presenza é usuale nei mercati finanziari. Si chiamano **opzioni** dei contratti che danno al contraente la facoltá (non l'obbligo) di comprare (in questo caso si parla di **call**) o vendere (in questo caso si parla di **put**) una unitá di un determinato titolo ad un determinato prezzo K, chiamato **prezzo di esercizio** (in inglese **strike price**) ad un tempo appartenente ad un insieme $\mathbf{T}$.

Ci sono due tipi principali di opzioni sui mercati: le opzioni **europee**, in cui $\mathbf{T} = \{T\}$, e le opzioni **americane**, in cui $\mathbf{T} = [0, T]$. In entrambi i casi il tempo T viene chiamato **tempo di esercizio** (in inglese **strike time**).

Vediamo in dettaglio una opzione europea, ed in particolare una call. Questo titolo permette ad un agente di acquistare al tempo T una unitá di un determinato titolo, che supponiamo avere prezzo descritto dal processo $(S(t))_t$, al prezzo di esercizio K. Ora, siccome l'agente mira a massimizzare il proprio guadagno, non eserciterá l'opzione se il prezzo $S(T)$ sará piú basso di K (poiché potrebbe comprare il titolo al prezzo piú basso $S(T)$); viceversa, se al tempo T il prezzo $S(T)$ sará piú alto di K, allora l'agente avrá la facoltá di esercitare l'opzione pagando K e di rivendere il titolo ad un prezzo piú alto $S(T)$. Possiamo quindi affermare che una opzione call europea sul titolo il cui prezzo é rappresentato dal processo $(S(t))_t$ é rappresentata dalla funzione:

$$(S(T) - K)^+$$

Un analogo ragionamento ci porta a dire che una opzione put europea sul titolo avente processo del prezzo $(S(t))_t$ é rappresentata dalla funzione:

$$(K - S(T))^+$$

Ci poniamo ora nell'ipotesi che il prezzo del titolo soddisfi l'equazione:

$$dS(t) = b(t)S(t)\ dt + \sigma(t)S(t)\ dW(t)$$

con $(b(t))_t \in \Lambda^1_W, (\sigma(t))_t \in \Lambda^2_W$ processi unidimensionali, $(W(t))_t$ moto browniano standard unidimensionale, e dato iniziale $S(0) = S_0 > 0$.

Supponiamo inoltre di avere dimostrato che una opzione call puó essere prezzata per arbitraggio. Se il mercato é completo (ad esempio nel caso trattato prima), allora in particolare le opzioni call e put europee sono dei consumi ammissibili, poiché le funzioni $(S(T) - K)^+$ e $(K - S(T))^+$ appartengono ad $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Vediamo ora quali sono i due principali metodi usati per dare un prezzo a queste opzioni.

Ci sono essenzialmente due modi per dare il prezzo ad una call. Il primo metodo usa il fatto che esiste una misura equivalente di martingala per un mercato privo di arbitraggi. Allora, siccome una call europea é un consumo ammissibile (infatti appartiene ad $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}^*)$), allora il suo prezzo al tempo 0 é dato da:

$$\begin{aligned} C(0) &= E_{\mathbf{P}^*}\left[\frac{(S(T) - K)^+}{S_0(T)}\right] = \\ &= E_{\mathbf{P}^*}\left[e^{-\int_0^T r(u)\ du}\left(S_0 e^{\int_0^T \sigma(t)\ dW(t) + \int_0^T (b(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2})\ dt} - K\right)^+\right] = \\ &= E_{\mathbf{P}^*}\left[e^{-\int_0^T r(u)\ du}\left(S_0 e^{\int_0^T \sigma(t)\ d\tilde{W}(t) + \int_0^T (r(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2})\ dt} - K\right)^+\right] \end{aligned}$$

quantitá che puó essere calcolata, ricordando che $(\tilde{W}(t))_t$ é un $\mathbf{P}^*$−moto browniano.

Per calcolare il prezzo di una put, notiamo che le espressioni che descrivono le due opzioni sono molto simili; questo ci suggerisce di scrivere:

$$S(T) - K = (S(T) - K)^+ - (S(T) - K)^- = (S(T) - K)^+ - (K - S(T))^+$$

Allora:

$$e^{-\int_0^T r(t)\ dt}(S(T) - K) = e^{-\int_0^T r(t)\ dt}(S(T) - K)^+ - e^{-\int_0^T r(t)\ dt}(K - S(T))^+$$

Calcolando le speranze di queste quantitá, e ricordando che il processo $(S(t)e^{-\int_0^t r(u)\ du})_t$ é una martingala ottengo:

$$E_{\mathbf{P}^*}[e^{-\int_0^T r(t)\ dt}(S(T) - K)] = C(0) - P(0)$$

$$C(0) - P(0) = S(0) - E_{\mathbf{P}^*}[e^{-\int_0^T r(t)\ dt}]K$$

Questa relazione, che lega il prezzo di una call e il prezzo di una put al prezzo del titolo e alla quota di esercizio, viene chiamata **relazione di paritá call - put**.

Esempio: nel modello di Black-Scholes, si ha $r(t) = r, b(t) = b$ e $\sigma(t) = \sigma$. Allora il prezzo di una opzione é dato da:

$$C(0) = E_{\mathbf{P}^*}[e^{-rT}(S_0 e^{\sigma \tilde{W}(T) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K)^+]$$

$\square$

Notiamo che la variabile aleatoria $\tilde{W}(T)$ ha legge $N(0, \sqrt{T})$. Allora possiamo calcolare la speranza in questo modo:

$$C(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT}(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\ dz$$

Ora, vediamo quando $S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K \geq 0$:

$$S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K \geq 0 \Leftrightarrow z \geq z^* = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \log \frac{K}{S_0} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} - \frac{r\sqrt{T}}{\sigma}$$

Allora la formula diventa:

$$C(0) = \int_{z^*}^{+\infty} e^{-rT}(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}z + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\ dz$$

Introducendo la funzione:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2}\ dz$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} C(0) &= \int_{z^*}^{+\infty} S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sigma\sqrt{T}z - \frac{\sigma^2}{2}T - \frac{1}{2}z^2}\ dz - \int_{z^*}^{+\infty} K e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\ dz = \\ &= S_0 \int_{z^*}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{T})^2}\ dz - K e^{-rT}(1-\phi(z^*)) = \\ &= S_0(1-\phi(w^*)) - K e^{-rT}(1-\phi(z^*)) \end{aligned}$$

dove $w^* = z^* - \sigma\sqrt{T}$; ricordando che $\phi(-z) + \phi(z) = 1$, arriviamo alla seguente formula esplicita:

$$C(0) = S_0\phi(-w^*) - K e^{-rT}\phi(-z^*)$$

La relazione di paritá call - put diventa:

$$C(0) - P(0) = S(0) - e^{-rT}K$$

e ci permette di calcolare subito il prezzo di una put europea:

$$P(0) = C(0) - S(0) + e^{-rT}K = e^{-rT}K\phi(z^*) - S_0\phi(w^*)$$

Il secondo metodo usato richiede l'ipotesi aggiuntiva che b, σ e r non siano dei processi qualsiasi, ma siano delle funzioni deterministiche, rispettivamente di classe C^1 e C^2; i prezzi dei titoli soddisfano allora le equazioni:

$$dS(t) = b(t)S(t)\ dt + \sigma(t)S(t)\ dW(t)$$
$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)\ dt$$

Il metodo sfrutta il fatto che i prezzi delle opzioni europee sono delle espressioni della forma:

$$E_{\mathbf{P}^*}[e^{-\int_0^T r(t)\ dt} f(S(T))]$$

Abbiamo visto che, se l'equazione che descrive $(S(t))_t$ é del tipo:

$$dS(t) = b(t, S(t))\ dt + \sigma(t, S(t))\ dW(t)$$

dove b e σ sono funzioni deterministiche di t e di $S(t)$, allora i prezzi delle opzioni al tempo 0 sono uguali a $u(T, 0, S_0)$, dove $u(T, s, x)$ é soluzione dell'equazione backward:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}u(T,s,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(T,s,x) + b(s,x)\frac{\partial}{\partial x}u(T,s,x) = 0 \\ u(T,T,x) = f(x) \end{cases}$$

in particolare, $f(x)=e^{-\int_0^T r(t)\ dt}(x-K)^+$ nel caso di una call, e $f(x)=e^{-\int_0^T r(t)\ dt}(K-x)^+$ nel caso di una put. Il problema di valutazione di una opzione allora si puó ricondurre al problema di trovare una soluzione all'equazione differenziale sopra scritta. Il vantaggio di questo metodo é che si puó calcolare numericamente la soluzione dell'equazione sopra scritta.

Esempio 7.24 *: nel caso del modello di Black-Scholes, l'equazione diventa della forma:*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s}u(T,s,x)+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(T,s,x)+bx\frac{\partial}{\partial x}u(T,s,x)=0 \\ u(T,T,x)=f(x) \end{cases}$$

che viene detta **equazione di Black-Scholes**. *La soluzione esplicita di questa equazione é la funzione trovata prima.*

$\square$

Capitolo 8

Modelli di struttura dei tassi di interesse

8.1 Modelli di struttura dei tassi di interesse basati sullo spot rate

Nella precedente trattazione abbiamo supposto il processo $(r(t))_t$ dell'intensitá istantanea del tasso di interesse (o **spot rate**) noto a priori; abbiamo visto anche un esempio di processo possibile nel modello di Black - Scholes, in cui lo spot rate era supposto costantemente uguale a $r > 0$. Usualmente, se si assume che lo spot rate abbia una struttura piú complessa, si suppone che anche esso sia governato da una equazione differenziale stocastica del tipo:

$$dr(t) = a(t)\ dt + \tau(t)\ dW(t)$$

In genere, si usa introdurre una struttura dei tassi di interesse piú complessa di quella del modello di Black - Scholes (in cui si aveva una struttura del tipo $r(t) = r$, chiamata spesso **struttura piatta dei tassi di interesse**), quando si vuole studiare l'evoluzione del prezzo di una obbligazione (ad esempio per poi dare un prezzo alle opzioni sull'obbligazione stessa). In questo caso, si rappresenta l'evoluzione del prezzo $(P(t,T))_t$ all'istante t di una obbligazione che scade all'istante T con una equazione del tipo:

$$dP(t,T) = b(t)P(t,T)\ dt + \sigma(t)P(t,T)\ dW_t$$

dove T viene considerato solo un parametro; viene poi introdotto un altro titolo, chiamato **titolo senza rischio** (che nella realtá si puó identificare con il denaro), che soddisfa l'equazione:

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)\ dt$$

Si fa infine l'ipotesi che esista una misura di martingala $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$ tale che il **prezzo attualizzato** dell'obbligazione, definito da:

$$\tilde{P}(t,T) = \frac{P(t,T)}{S_0(t)}$$

sia una martingala.

Vediamo ora una breve presentazione di due modelli classici di questa equazione.

8.2 Il modello di Vasicek

Il modello di Vasicek parte dall'equazione:

$$dr(t) = a(b - r(t))\ dt + \sigma\ dW(t)$$

con a, b, σ costanti positive. Notiamo che questo é un processo di Ornstein - Uhlenbeck reale, con soluzione esplicita:

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as}\ dW(s)$$

Allora il processo é gaussiano, e la soluzione $r(t)$ ha legge:

$$N\left(r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})\right)$$

Ció dá dei problemi, poiché $\mathbf{P}\{r(t) < 0\} > 0$, e questo é inconsistente con le ipotesi che abbiamo fatto, poiché significa che esistono degli stati del mondo in cui il prezzo di una obbligazione é decrescente. Questo modello é peró usato in pratica, poiché dá delle formule esplicite per il calcolo dei prezzi dei titoli.

8.3 Il modello di Cox - Ingersoll - Ross (CIR)

Il modello di Cox - Ingersoll - Ross, detto anche piú brevemente CIR, parte dall'equazione:

$$dr(t) = (a - br(t))\ dt + \sigma\sqrt{r(t)}\ dW(t)$$

con a e σ costanti positive, e $b \in \mathbf{R}$. Notiamo che a questa equazione non é possibile applicare il teorema di esistenza e unicitá classico. É tuttavia possibile dimostrare che per una equazione siffatta esiste un'unica soluzione (vedi Ikeda - Watanabe[1]) a causa dell'$\frac{1}{2}-$hölderianitá della funzione radice quadrata.

Il vantaggio di questo modello rispetto a quello di Vasicek é che in questo caso si puó dimostrare che $\mathbf{P}\{r(t) \geq 0\} = 1\ \forall t \in [0,T]$.

Una spiegazione qualitativa di questo fenomeno é questa: se $r(t)$ si avvicina allo zero, la traiettoria ha piú o meno lo stesso comportamento di una retta con coefficiente angolare $a > 0$, poiché gli altri termini dipendono da $r(t)$ o dalla sua radice, che possono essere trascurati rispetto ad a; questo significa che la traiettoria, se mai toccherá lo zero, ritornerá subito positiva.

I problemi di questo modello sono essenzialmente due:
1) i calcoli per stimare i prezzi dei titoli sono complicati; questo é un problema minore.
2) se non si scelgono i coefficienti a, b e σ con cura, sono possibili arbitraggi (vedere Cox - Ingersoll - Ross[1])

8.4 Modelli di struttura dei tassi di interesse basati sul forward rate

Negli ultimi anni si é sempre piú diffusa l'opinione che modellizzare l'evoluzione del prezzo di una obbligazione tramite lo spot rate non bastasse, questo a causa di due ragioni: la prima é che lo spot rate é un tasso istantaneo, che quindi non tiene conto della possibile evoluzione futura dei tassi di interesse; la seconda é che é difficile fare una stima dello spot rate, poiché il tasso privo di arbitraggio con scadenza piú breve osservabile sui mercati é quello a scadenza trimestrale; poiché l'ordine di grandezza dell'intervallo $[0, T]$ é tipicamente l'anno, non si possono avere delle rilevazioni troppo precise.

Per questi motivi ha preso sempre piú piede l'idea di modellizzare l'evoluzione del prezzo di una obbligazione tramite l'intensitá istantanea di interesse di proseguimento, detta anche **forward rate**, che é un indice piú preciso e meglio osservabile.

Chiamiamo **forward rate** un processo $(f(t,T))_t$ (notiamo la presenza della variabile $T > t$, che per ora verrá considerata un parametro) tale che il prezzo $P(t,T)$ all'istante t di una obbligazione scadente all'istante T sia della forma:

$$P(t,T) = P(t, t+x) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)\ du\right)$$

L'assunzione naturale che si fa sul forward rate f é che $f(t,t) = r(t)$. cerchiamo di giustificarla con il seguente ragionamento: notiamo che, se usassimo lo spot rate $(r(t))_t$ per calcolare il prezzo $P(t,T)$, otterremmo:

$$P(t,T) = P(t, t+x) = \exp\left(-\int_t^T r(u)\ du\right)$$

Possiamo supporre che, per x molto piccolo, i due modelli del prezzo $P(t,T)$ si comportino allo stesso modo; se supponiamo l'applicazione $u \to f(t,u)$ continua, questo significa che $f(t,u) = r(u)\ \forall u \in [t,T]$; se facciamo tendere u a t, otteniamo la relazione naturale $r(t,0) = r(0)$, che significa che lo spot rate é uguale al forward rate avente parametro di proseguimento $x = 0$.

Anche nei modelli basati sul forward rate, come nella modellizzazione dei tassi di interesse basati sullo spot rate, supponiamo che ci sia una misura di probabilitá $\mathbf{P}^*$ equivalente a $\mathbf{P}$ tale che il prezzo attualizzato dell'obbligazione che stiamo esaminando debba essere una $\mathbf{P}^*$-martingala locale; l'attualizzazione verrá effettuata sempre tramite il processo $(S_0(t))_t$, in cui appare lo spot rate. Per ragioni di comoditá di scrittura, supporremo di trovarci giá sotto la misura equivalente di martingala, che chiameremo semplicemente $\mathbf{P}$, e di voler esaminare l'equazione del forward rate.

Supponiamo quindi di essere nello spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, dotato della filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$, dove $\mathbf{P}$ é la probabilitá sotto cui i prezzi dei titoli sono delle martingale, e procediamo.

8.5 Modello di Heath - Jarrow - Morton

Presentiamo ora il modello di Heath - Jarrow - Morton; questo non é un modello vero e proprio, ma uno schema teorico a cui devono sottostare tutti i modelli di struttura di tassi di interesse che vogliono essere liberi da arbitraggio. Supponiamo che il forward rate soddisfi l'equazione:

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^T \alpha(u,T)\ du + \int_0^T \sigma(f(u,T))\ dW_u$$

Si ricava allora che, sotto la misura di martingala $\mathbf{P}$, α é della forma:

$$\alpha(t,T) = \sigma(f(t,T)) \int_t^T \sigma(f(t,u))\ du$$

e l'equazione del forward rate diventa:

$$df(t,u) = \left(\sigma(f(t,u)) \int_t^u \sigma(f(t,v))\ dv \right)\ dt + \sigma(f(t,u))\ dW_t \tag{8.1}$$

con dato iniziale $f(0,u) = \phi(u) \in C^0([0,T])$. Il teorema seguente, dovuto a Heath - Jarrow - Morton[1], dá delle condizioni sufficienti affinché l'equazione (8.1) abbia un'unica soluzione:

Teorema 8.1 *se la funzione $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é lipschitziana e limitata, allora $\forall \phi \in C^0([0,T])$ esiste un'unico processo a due indici $(f(t,u))_{0 \le t \le u \le T}$ adattato che sia soluzione dell'equazione (8.1).*

8.6 Modello di Musiela

Il modello di Musiela segue esattamente le stesse idee del modello di Heath - Jarrow - Morton, ma cambia leggermente il modo di descrivere il forward rate; questo permette di ricondursi ad una equazione in uno spazio di funzioni reali e di trovare, sotto particolari ipotesi, soluzioni esplicite. Vediamo in dettaglio questo modello.

Chiamiamo **forward rate** un processo $(r(t,x))_t$ (la variabile $x > 0$ verrá considerata un parametro, come nel caso precedente, in un primo tempo) tale che il prezzo $P(t,T)$ all'istante t di una obbligazione scadente all'istante $T = t + x$ sia della forma:

$$P(t,T) = P(t,t+x) = \exp\left(-\int_0^x r(t,u)\ du\right) = \exp\left(-\int_t^{t+x} r(t,u-t)\ du\right)$$

La relazione naturale questa volta é $r(t,0) = r(0)$.

Vogliamo modellizzare il forward rate con un'equazione stocastica del tipo:

$$\begin{cases} dr(t,x) = \alpha(t,x)\ dt + \tau^*(t,x)\ dW_t \\ r(0,x) \text{ dato} \end{cases}$$

α_t e τ_t sono processi a due parametri tali che $\forall x > 0$ abbiamo che $(\alpha(t,x))_t \in \Lambda^1_W$, $(\tau^*(t,x))_t \in \Lambda^2_W$ e $(W_t)_t$ é un moto browniano k-dimensionale standard adattato a $(\mathcal{F}_t)_t$. Ricordiamo che per ora tratteremo x come un semplice parametro, riservandoci poi uno studio piú approfondito.

Il prezzo all'istante t dello zero-coupon bond che scade all'istante T é:

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_0^{T-t} r(t,x)\ dx\right)$$

poiché il fattore di attualizzazione al tempo 0 é:

$$S_0(t) = \exp\left(\int_0^t r(u,0)\ du\right)$$

allora il prezzo attualizzato al tempo 0 di un bond comprato al tempo t con scadenza in T é:

$$\tilde{P}(t,T) = \frac{P(t,T)}{S_0(t)} = \exp\left(\int_0^t r(u,0)\ du - \int_0^{T-t} r(t,x)\ dx\right)$$

Seguiamo ora l'idea che $(\tilde{P}(t,T))_t$ debba essere una martingala locale $\forall T$:

Teorema 8.2 *: se modellizzo il forward rate con una equazione della forma (*), allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

1) $\forall T > 0$ *il processo* $(\tilde{P}(t,T))_t$ *é una martingala locale rispetto a* $\mathbf{P}$.

2) il processo $(r_t(x))_t$ *é tale che l'applicazione* $x \to r(t,x)$ *appartiene ad* $AC([0,+\infty))$ *e:*

$$\alpha(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(r(t,x) + \frac{1}{2}\left|\int_0^x \tau(t,u)\ du\right|^2\right)$$

Per una dimostrazione vedere Musiela[1].

$\square$

Il modello cosí ottenuto per il forward rate é allora il seguente:

$$\begin{cases} dr(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(r(t,x) + \frac{1}{2}\left|\int_0^x \tau(t,u)\ du\right|^2\right)\ dt + \tau^*(t,x)\ dW_t \\ r(0,x) \text{ dato} \end{cases}$$

Se ora non consideriamo x solo un parametro, ma una variabile in $[0,+\infty)$, allora potremo considerare l'equazione di prima una equazione differenziale stocastica a valori nelle funzioni $AC([0,+\infty))$, e precisamente:

$$\begin{cases} dr_t(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(r_t(x) + \frac{1}{2}\left|\int_0^x \tau_t(u)\ du\right|^2\right)\ dt + \tau_t^*(x)\ dW_t \\ r_0(x) \in AC([0,+\infty)) \text{ dato} \end{cases}$$

Tuttavia, questo spazio non é uno spazio di Hilbert, ma puó essere considerato uno spazio di Banach, identificandolo con lo spazio di Sobolev $W^{1,1}$. Il problema é che la teoria dell'integrazione stocastica in spazi di Banach é complessa e ancora frammentaria, per cui ci limiteremo a scegliere un opportuno spazio di Hilbert H in cui studiare il problema; per ora, peró, lasciamo lo spazio H imprecisato, e riformuliamo il problema in questi termini: il forward rate $(r_t(x))_t$ é un processo a valori in uno spazio di Hilbert separabile H, che soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica (chiaramente a valori in H):

$$\begin{cases} dr_t(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(r_t(x) + \frac{1}{2}\left|\int_0^x \tau_t(u)\ du\right|^2\right)\ dt + \tau_t^*(x)\ dW_t \\ r_0(x) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; H) \text{ dato} \end{cases}$$

Se facciamo le ipotesi che $(\mathcal{F}_t)_t$ sia la filtrazione naturale del moto browniano $(W_t)_t$, completata con gli insiemi di misura nulla, e il processo $(\tau_t(x))_t$ é tale che $E[\int_0^T \|\tau_t\|_H\ dt] < +\infty$, allora $(\tilde{P}(t,T))_t$ é una $\mathbf{P}$-martingala, e ogni titolo derivato puó essere rappresentato come somma della sua speranza e di un opportuno integrale stocastico. Questo ci permette di costruire una strategia autofinanziata per il portafoglio che simula il titolo; quindi la speranza puó essere interpretata come il prezzo libero da arbitraggio del titolo.

Vediamo ora un caso in cui ci sono soluzioni esplicite; suppongo che $k = 1$, cioé che $(W_t)_t$ sia un moto browniano reale, e che il processo $\tau_t(x) = \tau(x)$ sia identicamente uguale ad una funzione reale deterministica di x. Allora $(\tilde{P}(t,T))_t$ é una martingala e l'equazione diventa:

$$dr_t(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} r_t(x) + \tau(x)\int_0^x \tau(u)\ du\right)\ dt + \tau(x)\ dW_t$$

Se poniamo:

$$A = \frac{\partial}{\partial x}$$
$$c(x) = \tau(x) \int_0^x \tau(u)\ du$$

allora possiamo riscrivere l'equazione in questo modo:

$$\begin{cases} dr_t(x) = (Ar_t(x) + c(x))\ dt + \tau(x)\ dW_t \\ r_0(x) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}; H) \end{cases} \tag{8.2}$$

Se scegliamo uno spazio di Hilbert separabile H, ed imponiamo che $r_0(x)$, $c(x)$ e $\tau(x)$ vi appartengano, e che $A : D(A) \to H$ sia chiuso e sia il generatore infinitesimale del semigruppo:

$$S_t : H \to H,\ S_t u(x) = u(x+t)$$

allora la soluzione dell'equazione precedente é un processo di Ornstein-Uhlenbeck nello spazio di Hilbert H:

$$\begin{aligned} r_t(x) &= S_t r_0(x) + \int_0^t S_{t-u} c(x)\ du + \int_0^t S_{t-u}\tau(x)\ dW_u = \\ &= r_0(x+t) + \int_0^t \tau(x+t-u) \left(\int_0^{x+t-u} \tau(v)\ dv\right)\ du + \\ &\quad + \int_0^t \tau(x+t-u)\ dW_u = \\ &= r_0(x+t) + \int_x^{x+t} \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du + \int_0^t \tau(x+t-u)\ dW_u = \\ &= r_0(x+t) + \int_0^{x+t} \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du + \\ &\quad - \int_0^x \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du + \int_0^t \tau(x+t-u)\ dW_u = \\ &= r_0(x+t) + \frac{1}{2}\left(\left(\int_0^{x+t} \tau(u)\ du\right)^2 + \left(\int_0^x \tau(u)\ du\right)^2\right) + \\ &\quad + \int_0^t \tau(x+t-u)\ dW_u \end{aligned}$$

La soluzione é un processo gaussiano con media:

$$E[r_t](x) = r_0(x+t) + \frac{1}{2}\left(\left(\int_0^{x+t} \tau(u)\ du\right)^2 + \left(\int_0^x \tau(u)\ du\right)^2\right) \tag{8.3}$$

e covarianza (se $s \le t$):

$$Cov(r_t(x), r_s(y)) = S_v Cov(r_0, r_0) S_t^* + \int_0^s \tau(x+t-u) \otimes \tau(y+s-u)\ du \tag{8.4}$$

Ci proponiamo ora di studiare questa equazione in due spazi di Hilbert particolari:

$$H = L^2_\gamma([0,+\infty)) = \left\{ u : [0,+\infty) \to \mathbf{R} \mid u \text{ mis. e t. c. } \int_0^{+\infty} u^2(x) e^{-\gamma x}\, dx < +\infty \right\}$$

$$H = L^2([0,+\infty)) = \left\{ u : [0,+\infty) \to \mathbf{R} \mid u \text{ mis. e t. c. } \int_0^{+\infty} u^2(x)\, dx < +\infty \right\}$$

In particolare, esamineremo i seguenti problemi:

- trovare una soluzione esplicita mild

- trovare la legge delle soluzioni e del loro processo

- esistenza e unicitá di misure invarianti per il processo delle soluzioni.

Vediamo il significato intuitivo di quanto stiamo per fare: la scelta degli spazi é giustificata dal fatto che, da osservazioni empiriche, la tipica curva $r_0(x)$, cioé il tipico dato iniziale, é crescente in x, e questo giustifica la scelta dello spazio L^2_γ (dobbiamo permettere al dato iniziale di essere crescente); tuttavia, ci sono dei casi in cui $r_0(x)$ é decrescente, e quindi puó avere senso studiare l'equazione in L^2. Sempre da osservazioni sperimentali, si sa che il tipico $\tau(x)$ é positivo e crescente fino ad un massimo (che in genere si raggiunge per $t = 6$ mesi), per poi decrescere, per tendere a zero all'infinito. Questo fenomeno si riflette nei principali modelli usati in pratica (ad esempio il modello di Vasicek ha $\tau(x) = e^{-\lambda x}$; vedere Vasicek[1]), e infatti constateremo che per avere misure invarianti saranno necessarie e sufficienti delle ipotesi su $\tau(x)$ tali da renderlo verosimile con queste osservazioni sperimentali.

Dobbiamo peró prendere questi risultati con molta cautela: bisogna ricordarsi che il caso da noi considerato é un modello matematico che semplifica di molto il modello originale proposto da Musiela, sostituendo ad un moto browniano multidimensionale uno unidimensionale, ma soprattutto ad un processo una costante. La presenza di un processo nel termine di diffusione renderebbe molto improbabile l'esistenza di una misura invariante nel modello originale.

Infine l'utilitá di avere una misura invariante é discutibile: bisogna infatti considerare che il tipico problema finanziario ha un insieme dei tempi della forma $[0, T]$, e questo potrebbe essere un insieme troppo piccolo affinché le soluzioni siano influenzate dalla presenza della misura invariante; tuttavia, ci sono alcuni autori che si ispirano al principio secondo cui i mercati continueranno ad esistere indefinitamente, senza un istante di termine; ció significa che puó avere un senso prevedere comportamenti asintotici dei fenomeni esaminati.

8.7 Equazione del forward rate nello spazio L^2_γ

Studiamo ora il caso in cui lo spazio di Hilbert é $L^2_\gamma([0,+\infty))$, dotato del prodotto scalare:

$$< u, v >_{L^2_\gamma} = \gamma \int_0^{+\infty} u(x) v(x) e^{-\lambda x}\, dx$$

Bisogna innanzitutto controllare che l'equazione abbia senso in questo spazio. Dobbiamo allora richiedere che $r_0(x) \in L^2_\gamma$, $\tau(x) \in L^2_\gamma$ e $c(x) \in L^2_\gamma$; il calcolo per quest'ultima condizione é laborioso; tuttavia, possiamo trovare delle condizioni sufficienti affinche' questo accada; scopriremo poi che queste condizioni si riveleranno necessarie per l'esistenza di una misura invariante. Se imponiamo che $u \in L^2([0,+\infty))$, allora abbiamo che:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} c^2(x)e^{-\gamma x}\,dx &= \int_0^{+\infty} \tau^2(x)e^{-\gamma x}\left(\int_0^x \tau(u)\,du\right)^2 dx \leq \\
&\leq \int_0^{+\infty} \tau^2(x)e^{-\gamma x}x\int_0^x \tau^2(u)\,du\,dx \leq \\
&\leq \int_0^{+\infty} \tau^2(x)e^{-\gamma x}x\int_0^{+\infty} \tau^2(u)\,du\,dx \leq \\
&\leq \|\tau\|_{L^2}\int_0^{+\infty} \tau^2(x)\|xe^{-\gamma x}\|_{C^0}\,dx \leq \\
&\leq \|xe^{-\gamma x}\|_{C^0}\|\tau\|^2_{L^2}
\end{aligned}$$

Bisogna inoltre controllare che $A : D(A) \to H$ sia un'operatore chiuso. Il dominio di A é lo spazio di Sobolev:

$$D(A) = W^{1,2}_\gamma([0,+\infty)) = \left\{u \in L^2_\gamma \;\middle|\; u(x) = u_0 + \int_0^x \psi(t)\,dt, \psi \in L^2_\gamma\right\}$$

dotato peró non del suo prodotto scalare, ma di quello di L^2_γ.

Verifichiamo che A é chiuso: $\forall\{f_n\} \subseteq D(A)$ tale che $f_n \to^{L^2_\gamma} f$ e $Af_n = \psi_n \to^{L^2_\gamma} \psi$, allora, siccome $W^{1,2}_\gamma$ é chiuso, e le condizioni sopra significano che $\{f_n\}_n$ é di Cauchy in $W^{1,2}_\gamma$, e quindi $f \in W^{1,2}_\gamma = D(A)$ e $Af = \psi$; quindi l'operatore A é chiuso in H.

Infine bisogna verificare che $(S_t)_t$ é un semigruppo fortemente continuo avente come generatore inifinitesimale A.

Lemma 8.3 : *$(S_t)_t$ é un semigruppo fortemente continuo avente come generatore infinitesimale A.*

Dimostrazione: bisogna innanzitutto controllare le condizioni $1-4$ di semigruppo:

1) $S_t \in L(L^2_\gamma, L^2_\gamma) = L$ e $\|S_t\|_L \leq e^{\frac{\gamma}{2}u}$; infatti se $f \in L^2_\gamma$, allora:

$$\begin{aligned}
\|S_tf(x)\|^2_{L^2_\gamma} &= \int_0^{+\infty} f^2(x+t)e^{-\gamma x}\,dx = e^{\gamma t}\int_0^{+\infty} f^2(x+t)e^{-\gamma(x+t)}\,dx = \\
&= e^{\gamma t}\int_t^{+\infty} f^2(x)e^{-\gamma x}\,dx \leq e^{\gamma t}\|f\|^2_{L^2_\gamma}
\end{aligned}$$

quindi $\|S_t\|_L \leq e^{\gamma t}$.

2-3) verifica banale

4) se $f \in C^0([0,+\infty))$, allora:

$$\lim_{t\to 0} \|S_t f - f\|_{L^2_\gamma} = \lim_{t\to 0} \int_0^{+\infty} (f(t+x) - f(x))^2 e{-}\gamma x \; dx = 0$$

allora, siccome C^0 é denso in L^2_γ, ho che $\forall\varepsilon, \forall g \in L^2_\gamma\ \exists f \in C^0$ tale che $\|f-g\|_{L^2_\gamma} < \varepsilon$; allora:

$$\begin{aligned} \|S_t g - g\|_{L^2_\gamma} &\leq \|S_t g - S_t f\|_{L^2_\gamma} + \|S_t f - f\|_{L^2_\gamma} + \|f-g\|_{L^2_\gamma} \leq \\ &\leq \|S_t\|_L \|f-g\|_{L^2_\gamma} + \varepsilon + \|f-g\|_{L^2_\gamma} \leq (e^{\gamma t}+2)\varepsilon \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che A é il generatore infinitesimale di $(S_t)_t$; se $f \in D(A) = W^{1,2}_\gamma$, allora $\forall t > 0$ risulta:

$$\begin{aligned} \frac{S_t f - f}{t}(x) &= \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \frac{1}{t}\int_x^{x+t} f'(s)\; ds = \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t f'(x+u)\; du = \frac{1}{t}\int_0^t (S_u A f)(x)\; du \end{aligned}$$

poiché S_t é fortemente continuo in 0, allora l'ultima espressione tende a $S_0 A f = Af$.

□

Abbiamo quindi dimostrato il seguente

Teorema 8.4 *: se $\tau \in L^2_\gamma \cap L^2$, e $r_0 \in L^2_\gamma$, allora esiste un'unica soluzione dell'equazione (8.2), data da:*

$$r_t(x) = r_0(x+t) + \frac{1}{2}\left(\left(\int_0^{x+t} \tau(u)\; du\right)^2 + \left(\int_0^x \tau(u)\; du\right)^2\right) + \int_0^t \tau(x+t-u)\; dW_u \quad (8.5)$$

La soluzione é un processo gaussiano con media (8.3) e covarianza (8.4).

□

Per affrontare il problema di trovare condizioni per l'esistenza di una misura invariante (ed eventualmente per la sua unicitá), usiamo il teorema (6.14).

Controlliamo le condizioni (1) e (2) della proposizione; ho che:

$$Q(x,x') = \tau(x) \otimes \tau(x')$$

$$Q_t(x,x') = \int_0^t (S_u\tau(x)) \otimes (S_u\tau(x'))\; du = \int_0^t \tau(x+u) \otimes \tau(x'+u)\; du$$

Per calcolare la traccia di Q_t ci é utile il seguente lemma:

Lemma 8.5 *: se $T : H \times H \to \mathbf{R}$ é della forma $T = a \otimes b$, con $a, b \in H$, allora:*

$$\text{Tr }(T) = < a, b >$$

.

Dimostrazione: Per definizione di traccia abbiamo:

$$\begin{aligned}
\text{Tr }(T) &= \sum_0^\infty {}_n < Te_n, e_n > = \sum_0^\infty {}_n << a, e_n > b, e_n > = \\
&= \sum_0^\infty {}_n < a, e_n >< b, e_n > = < a, b >
\end{aligned}$$

□

Abbiamo che:

$$\text{Tr }(Q_t) = \int_0^t \|\tau(x+u)\|^2_{L^2_\gamma} \; du$$

Siccome la funzione $t \to \text{Tr }(Q_t)$ é crescente in t, allora:

$$\begin{aligned}
\sup_{t \geq 0} \text{Tr }(Q_t) &= \lim_{t \to +\infty} \text{Tr }(Q_t) = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \|\tau(x+u)\|^2_{L^2_\gamma} \; du \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \tau^2(x+u) \; dx \; du = \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \int_0^{+\infty} \tau^2(x+u) \; du \; dx = \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \int_x^{+\infty} \tau^2(u) \; du \; dx
\end{aligned}$$

Ora, se $\tau \in L^2([0, +\infty))$, allora l'integrale converge; viceversa, se $\tau \notin L^2([0, +\infty))$, allora affinché l'integrale converga, é necessario che la funzione $x \to \int_x^{+\infty} \tau^2(u) \; du$ sia quasi certamente finita, quindi, siccome é decrescente, che sia finita per $x > 0$. Allora, per ogni $x^* > 0$ fissato, $\int_{x^*}^{+\infty} \tau^2(u) \; du$ é finito, e:

$$\int_0^{x^*} \tau^2(u) \; du = e^{\gamma x^*} \int_0^{x^*} e^{-\gamma x^*} \tau^2(u) \; du \leq e^{\gamma x^*} \int_0^{x^*} e^{-\gamma u} \tau^2(u) \; du$$

che é finito, quindi é necessario che $\tau \in L^2$.

Per trovare una misura invariante per l'equazione

$$dZ_t = (AZ_t + c) \; dt \tag{8.6}$$

tentiamo di trovare una soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} + c$$

indipendente dal tempo, quindi di risolvere l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + c = 0$$

una soluzione di questa é:

$$z(x,t) = z^*(x) = -\int_0^x c(x)\ dx = -\int_0^x \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du$$

controlliamo se $z(t,x) \in L^2_\gamma$:

$$\begin{aligned} |z^*(x)| &= \left|\int_0^x \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du\right| \le \int_0^x |\tau(u)| \int_0^u |\tau(v)|\ dv\ du \le \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^x |\tau(u)|\ du\right)^2 \le \frac{1}{2} x \int_0^x |\tau(u)|^2\ du \le x\|\tau\|^2_{L^2_\gamma} \end{aligned}$$

allora, se il dato iniziale ha legge δ_{z^*}, allora la soluzione ha legge δ_{z^*} $\forall t \ge 0$, e quindi esiste una misura invariante per l'equazione (8.6). Noto peró che anche le costanti appartengono a L^2_γ, ogni dato iniziale del tipo $\delta_{z^*+d}, d \in \mathbf{R}$ genera una misura invariante sul processo, che viene ad avere una legge marginale δ_{z^*+d} $\forall t \ge 0$. Sembrerebbe quindi che ci siano infinite misure invarianti; una eventuale rappresentazione di tutte sarebbe comunque molto complicata. Se infatti prendiamo per (8.6) un dato iniziale $f \in L^2_\gamma$ con periodo T, allora la soluzione per (Z) é $z(x,t) = f(t+x)$. Allora, se definiamo la variabile aleatoria π : $([0,T], \mathcal{B}([0,T])) \in L^2_\gamma$ tale che $\pi(t) = f(.+t)$ e mettiamo la densitá uniforme su $[0,T]$, allora π induce una misura μ_f su L^2_γ tale che, se il dato iniziale ha legge μ_f, allora otteniamo una misura invariante con legge μ_f $\forall t \ge 0$. Ci fermiamo quindi qui e riassumiamo i risultati ottenuti nel seguente:

Teorema 8.6 *: data l'equazione (8.2) nello spazio di Hilbert L^2_γ, condizione necessaria e sufficiente per avere una misura invariante é:*

$$\tau(x) \in L^2_\gamma([0,+\infty)) \cap L^2([0,+\infty))$$

ed esistono infinite misure invarianti; in particolare le misure della forma:

$$\delta_{z^*+c} * N(0, Q_\infty), c \in \mathbf{R}$$

$$\mu_f * N(0, Q_\infty), f \in L^2_\gamma \text{ periodica}$$

sono misure invarianti, dove:

$$Q_\infty = \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \int_x^{+\infty} \tau^2(u)\ du\ dx$$

$$z^*(x) = -\int_0^x \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du$$

$f \in L^2_\gamma$ é periodica di periodo T e μ_f é la misura immagine della densitá uniforme su $[0,T]$ tramite l'applicazione $t \to f(t+.)$.

$\square$

8.8 Equazione del forward rate nello spazio L^2

Studiamo ora il caso in cui $H = L^2([0,+\infty))$. Affinché l'equazione abbia senso dobbiamo avere che $\tau \in L^2$, $c \in L^2$ e A sia un operatore chiuso da $D(A)$ in L^2 che genera un semigruppo fortemente continuo. Controlliamo la seconda e la terza condizione. Come nell'altro caso, per $c \in L^2$ diamo una condizione sufficiente, che si rivelerá necessaria per avere una misura invariante.

$$\int_0^{+\infty} \tau^2(x) \left(\int_0^x \tau(u)\ du\right)^2\ dx = \int_0^{+\infty} \tau^2(x) x \int_0^x \tau(u)^2\ du\ dx \leq \int_0^{+\infty} \tau^2(x) x\ dx \|\tau\|_{L^2}$$

quindi una condizione sufficiente perché c stia in L^2 é che $\sqrt{u}\tau(u) \in L^2$.
Dobbiamo verificare che $A : D(A) \to L^2$ é chiuso. Il dominio di A in L^2 é:

$$D(A) = W^{1,2}([0,+\infty)) = \left\{ u \in L^2 \;\middle|\; u(x) = u_0 + \int_0^x \psi(t)\ dt, \psi \in L^2 \right\}$$

dotato del prodotto scalare di L^2. Si verifica che A é chiuso con un ragionamento analogo al caso precedente

Verifichiamo, come prima, che $(S_t)_t$ é un semigruppo fortemente continuo avente come generatore infinitesimale A.

Lemma 8.7 *: $(S_t)_t$ é un semigruppo fortemente continuo avente come generatore infinitesimale A.*

Dimostrazione: bisogna controllare le condizioni $1-4$ di semigruppo.
1) $S_t \in L(L^2, L^2) = L$ e $\|S_t\|_L \leq 1$; infatti se $f \in L^2$, allora:

$$\begin{aligned} \|S_t f(x)\|^2_{L^2} &= \int_0^{+\infty} f^2(x+t)\ dx = \int_t^{+\infty} f^2(x)\ dx \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} f^2(x)\ dx = \|f\|^2_{L^2} \end{aligned}$$

quindi $\|S_t\|_L \leq 1$.

2-3) verifica banale

4) se $f \in C^0([0,+\infty))$, allora la tesi segue da un argomento di densitá analogo a quello del caso $H = L^2_\gamma$.

La verifica che A é generatore infinitesimale di $(S_t)_t$ é analoga al caso $H = L^2_\gamma$

□

Abbiamo dimostrato il

Teorema 8.8 *: se $\tau(x) \in L^2([0,+\infty)), \sqrt{x}\tau(x) \in L^2([0,+\infty))$ e $r_0 \in L^2([0,+\infty))$, allora l'equazione (8.2) ha un'unica soluzione in L^2, data da (8.5), che é un processo gaussiano con media (8.3) e covarianza (8.4).*

□

Controlliamo stavolta le condizioni (1) e (3) della proposizione (6.14). Come prima, abbiamo che:

$$Q(x,x') = \tau(x) \otimes \tau(x')$$

$$Q_t(x,x') = \int_0^t \tau(x+u) \otimes \tau(x'+u)\ du$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\ (Q_t) &= \int_0^t \|\tau(.+u)\|^2_{L^2}\ du = \int_0^t \int_0^{+\infty} \tau^2(x+u)\ dx\ du = \\ &= \int_0^t \int_u^{+\infty} \tau^2(x)\ dx\ du \end{aligned}$$

$$\sup tr(Q_t) = \int_0^{+\infty} \int_u^{+\infty} \tau^2(x)\ dx\ du = \int_0^{+\infty} \tau^2(x) \int_0^x\ du\ dx = \int_0^{+\infty} \tau^2(x) x\ dx$$

quindi la condizione $\sqrt{x}\tau(x) \in L^2$ é necessaria per avere una misura invariante.

Controlliamo ora il punto (3). L'immagine di A in L^2 é:

$$Im(A) = \left\{ \psi \in L^2\ \mid \exists z_0 \in \mathbf{R} \text{ tale che } z(x) = z_0 + \int_0^x \psi(t)\ dt \in L^2 \right\}$$

Abbiamo giá controllato che $c(x) = \tau(x) \int_0^x \tau(u)\ du \in L^2$. Bisogna ora controllare che c sia la derivata debole di una funzione in L^2, e in particolare:

$$z(x) = z_0 + \int_0^x \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du = z_0 + \frac{1}{2} \left(\int_0^x \tau(u)\ du \right)^2$$

z é una funzione crescente; allora $z \in L^2$ solo se $\lim_{x \to +\infty} z(x) = 0$. Questo determina z_0:

$$\lim_{x\to+\infty} z(x) = z_0 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\int_0^x \tau(u)\ du\right)^2$$

le condizioni necessarie perché questo limite sia uguale a 0 sono che $\tau \in L^1$ e che $z_0 = -\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} \tau(u)\ du\right)^2$. Vediamo ora sotto che condizioni z puó appartenere ad L^2:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} z^2(x)\ dx &= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\left(\int_0^{+\infty}\tau(u)\ du\right)^2 - \left(\int_0^x \tau(u)\ du\right)^2\right)^2 dx = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\tau(u)\ du\right)^2\left(\int_0^x \tau(u)\ du + \int_0^{+\infty}\tau(u)\ du\right)^2 dx = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\tau(u)\ du\right)^2\left(\int_0^x \tau(u)\ du\right)^2 dx + \\
&\quad +\frac{1}{2}\|\tau\|_{L^1}^2\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\tau(u)\ du\right)^2\left(\int_0^x \tau(u)\ du\right) dx \\
&\quad +\frac{1}{4}\|\tau\|_{L^1}^2\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\tau(u)\ du\right)^2 dx \leq \\
&\leq \|\tau\|_{L^1}^2\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\tau(u)\ du\right)^2 dx
\end{aligned}$$

Dal penultimo passaggio si ricava che la condizione $\int_x^{+\infty}\tau(u)\ du \in L^2$ é necessaria perché $z \in L^2$; in virtú dell'ultimo passaggio, questa condizione é anche sufficiente.

Se questa condizione é verificata, allora ogni misura invariante é della forma:

$$\mu = \nu * \delta_b * N(0, Q_\infty)$$

dove $b \in D(A)$ é tale che $Ab = -c$, e ν é una misura invariante per il sistema:

$$dZ_t = (AZ_t)\ dt \tag{8.7}$$

allora $b(x) = -z(x)$ é l'unica funzione che verifica la condizione su b. Cerchiamo ora misure invarianti per l'equazione (8.7). Innanzitutto cerchiamo soluzioni aventi come legge una delta di Dirac; ció equivale a risolvere l'equazione differenziale:

$$\begin{cases} z' = Az \\ z_0 \in L^2 \end{cases}$$

la cui soluzione é $S_t z_0$, cioé: $z(x,t) = z_0(x+t)$. Siccome voglio una soluzione stazionaria, devo avere che $S_t z_0 = z_0$, cioé $z_0 = \text{cost.}$; ma l'unica funzione costante in L^2 é zero, e quindi l'unica misura invariante della forma δ_z é δ_0.

Vogliamo dimostrare che questa é l'unica misura invariante per (8.7). A questo proposito notiamo che in questo caso l'operatore P_t é il seguente:

$$\forall \phi \in B_b(H), (P_t)(f) = E[\phi(u_t(f))] = E[\phi(S_t f)] = \phi(S_t f)$$

Possiamo utilizzare il lemma dell'altra sezione; per farlo usiamo i due lemmi:

Lemma 8.9 *: se $f \in L^2$, allora $P_t^* \delta_f = \delta_{S_t f}$.*

Dimostrazione: $\forall B \in \mathcal{H}$ ho che:

$$\begin{aligned}(P_t^* \delta_f)(B) &= < \mathbf{1}_B, P_t^* \delta_f >=< P_t \mathbf{1}_B, \delta_f >= (P_t \mathbf{1}_B)(f) = E[\mathbf{1}_B(S_t f)] = \\ &= \mathbf{1}_B(S_t f) =< \mathbf{1}_B, \delta_{S_t f} >= \delta_{S_t f}(B)\end{aligned}$$

□

Lemma 8.10 *: se H é uno spazio di Hilbert, e $f_t \to f$ in norma, allora $\delta_{f_t} \to^{deb} \delta_f$.*

Dimostrazione: controlliamo che $\forall \phi \in C_b(H)$, $\forall f \in H$ si ha:

$$\int_H \phi(x)\ d\delta_f(x) = \phi(f)$$

ma, poiché $\phi \in C_b(H)$, allora $\forall \varepsilon\ \exists \delta$ tale che:

$$\|f_t - f\|_H < \delta \Rightarrow |\phi(f_t) - \phi(f)| < \varepsilon$$

siccome $f_t \to^H f$, allora $\phi(f_t) \to \phi(f)$, cioé:

$$\int_H \phi(x)\ d\delta_{f_t}(x) = \phi(f_t) \to \int_H \phi(x)\ d\delta_f(x) = \phi(f)$$

□

Poiché $\forall f \in L^2, \lim_{t \to +\infty} S_t f = 0$, i due lemmi precedenti implicano che $P_t^* \delta_f \to^{deb.} \delta_0$ $\forall f \in L^2$, e quindi, in virtú della proposizione (6.13), che δ_0 é l'unica misura invariante per l'equazione.

Abbiamo quindi dimostrato il seguente:

Teorema 8.11 *: data l'equazione (8.2) nello spazio di Hilbert L^2, condizioni necessarie e sufficienti per avere una misura invariante sono:*

$$\tau(x) \in L^2([0, +\infty))$$
$$\sqrt{x}\tau(x) \in L^2([0, +\infty))$$
$$\tau(x) \in L^1([0, +\infty))$$

$$\int_x^{+\infty} \tau(u)\ du \in L^2([0,+\infty))$$

in queste ipotesi esiste l'unica misura invariante:

$$\delta_{z^*+z_0} * \delta_0 * N(0, Q_\infty) = N(z^* + z_0, Q_\infty)$$

dove:

$$z^*(x) + z_0 = \int_0^x \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du - \int_0^{+\infty} \int_0^{\infty} \tau(u) \int_0^u \tau(v)\ dv\ du$$

$$Q_\infty = \int_0^{+\infty} \tau^2(x) x\ dx$$

□

8.9 Problemi aperti

La discussione precedente voleva solo essere esemplificativa delle proprietá dell'equazione del forward rate proposta da Musiela; rimangono molti problemi aperti, e ne citiamo ora alcuni:

1) Cercare una eventuale soluzione esplicita dell'equazione di Ornstein - Uhlenbeck nel caso in cui c e τ siano non piú delle costanti nello spazio di Hilbert, ma degli opportuni processi a valori in uno spazio di Hilbert H opportuno.

2) Cercare soluzioni dell'equazione ed eventuali misure invarianti nei casi in cui $H = W^{1,2}_\gamma([0,+\infty))$ o $H = W^{1,2}([0,+\infty))$.

3) Delle innumerevoli misure invarianti trovate in $L^2_\gamma([0,+\infty))$, trovare quale potrebbe essere la piú "plausibile"; un metodo per questo é quello di sostituire l'operatore $A = \frac{\partial}{\partial x}$ con l'operatore $A' = \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, trovare la (o le) misure invarianti per questo operatore, e vedere cosa succede quando $\varepsilon \to 0$.

Bibliografia

Baldi, Paolo

[1] Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni, (1984) Pitagora Editrice, Bologna

Black, F., Scholes, M.

[1] The pricing of options and corporate liabilites, (1973) in "Journal of Political Economy", 81, pagg. 637 - 659

Cox, J., Ingersoll, J., Ross, S.

[1] A theory of the term structure of interest rates, (1985) in "Econometrica, 53, pagg. 385 - 407

Da Prato Giuseppe

[1] Introduction to differential stochastic equations, (1995) Scuola Normale Superiore, Pisa

Da Prato Giuseppe, Zabczyk Jerzy

[1] Stochastic equations in infinite dimensions, (1992) Cambridge University Press

[2] Ergodicity for infinite dimensional systems, (di prossima pubblicazione) Cambridge University Press

Harrison, M. J., Kreps, D. M.

[1] Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, (1979) in "Journal of Economic Theory", 29, pagg. 381 - 408

Heath, D., Jarrow, R., Morton, A.

[1] Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology, (1992) in "Econometrica", 60(1), pagg. 77 - 105

Ikeda Nobuyuki, Watanabe Shinzo

[1] Stochastic differential equations and diffusion processes, (1981) North Holland, New York

Karatzas, I., Shreve, S. E.

[1] Brownian motion and stochastic calculus, (1988) Springer-Verlag, New York

Lamberton Damien, Lapeyre Bernard

[1] Introduction au calcul stochastique appliqué á la finance, (1991) Société de Mathématiques Appliquées et et Industrielles

Merton, R. C.

[1] Theory of rational option pricing, (1973) in "Bell Journal of Economics and Management Science", 4, pagg. 141 - 183

Moriconi Franco

[1] Matematica Finanziaria, (1994) Il Mulino, Bologna

Musiela Marek
[1] Stochastic PDEs and term structure models

Pazy, A.
[1] Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, (1983) Springer-Verlag, New York

Vasicek, O.
[1] An equilibrium characterisation of the term structure, (1977) in "Journal of Financial Economics", 5, pagg. 177–188