

ESERCIZI ALGEBRA 2

12 novembre 2008 (14.00-15.30, AULA 1A150)

1. Si consideri il gruppo $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0 \right\}$ con la moltiplicazione righe per colonne.
- (a) Si dimostri che $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0 \right\}$ è un sottogruppo normale di G .
- (b) Si provi che G/N è isomorfo al gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^*$ dei reali non nulli.
- (c) Si considerino gli elementi $u = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. È vero che $Nu = Nv$ nel gruppo quoziente G/N ?
- (d) Si verifichi che il sottogruppo $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$ è un sottogruppo normale di G .

2. Nel gruppo simmetrico S_9 si consideri la permutazione

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Si decompongano le permutazioni α ed α^{-1} in prodotto di cicli disgiunti e si determini il periodo di α .
- b) Si dica quanti sono i sottogruppi di $\langle \alpha \rangle$, e per ciascuno di essi si individui un generatore.
- c) Qual è il sottogruppo di $\langle \alpha \rangle$ che coincide con $\langle \alpha \rangle \cap A_9$?
3. Verificare che $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ con prodotto $(a, b)(c, d) = (ac, ad + b)$ è un gruppo.
- I) Si dimostri che $H = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ è un sottogruppo di G , e che $K = \{(1, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo normale di G .
- II) Sia $\{e\} \neq N \leq K$; si provi che se $N \triangleleft G$ allora $N = K$.
- III) È vero che G è il prodotto diretto (interno) di H e K ?

4. Nel gruppo moltiplicativo $G = GL_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali con determinante non nullo si

considerino le matrici $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Si determinino i centralizzanti di u e v in G .
- (b) Si verifichi che il centro di G è $Z = \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R}, k \neq 0 \right\}$.
- (c) È vero che u e v sono coniugate in G ?

5. In un gruppo $(G; \cdot)$ esistano due elementi a, b tali che

- I) $G = \langle a, b \rangle$;
- II) $|a| = |b| = 5$ e $\langle a \rangle \neq \langle b \rangle$;
- III) posto $c = a^{-1}b^{-1}ab$ (ovvero $b^{-1}ab = ac$), sia $c \in Z(G)$.

Si provi che

- i) $c^5 = 1_G$;
- ii) se $c = 1_G$, allora $|G| = 5^2$;
- iii) se $c \neq 1_G$, allora $|\langle a, c \rangle| = 5^2$, $G = \langle a, c \rangle \langle b \rangle$ e quindi $|G| = 5^3$.

6. Nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{Q}^*$ dei razionali non nulli si consideri il sottoinsieme

$$D = \{2^x 5^y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Si verifichi che:

- a) D è un sottogruppo di $\mathbb{Q}^*$;
- b) $D = \langle 2 \rangle \times \langle 5 \rangle$ (prodotto diretto interno);
- c) l'applicazione $\eta : D \rightarrow \mathbb{Z}$ definita ponendo $\eta(2^x 5^y) = x - y$ è un omomorfismo suriettivo di D sul gruppo additivo degli interi.
- d) Si descriva il nucleo di η e si provi che è ciclico.

7. Nel gruppo simmetrico S_{10} si considerino le permutazioni

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 10 & 4 & 7 & 3 & 6 & 9 & 8 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

e il sottoinsieme $G = \{\sigma \in S_{10} \mid \sigma(i) \leq 6 \text{ per ogni } 1 \leq i \leq 6\}$.

- a) Si verifichi che G è sottogruppo di S_{10} .
- b) Si scrivano α e β come prodotti di cicli disgiunti.
- c) È vero che i laterali destri $G\alpha$ e $G\beta$ coincidono?
- d) Provare che l'ordine di σ è minore o uguale a 20 per ogni $\sigma \in G$.

8. Sia $(G; \cdot)$ un gruppo e sia ϕ un'applicazione di G in G . Si considerino il prodotto diretto $\mathcal{G} = G \times G$ e in esso il sottoinsieme $\mathcal{H} = \{(g, \phi(g)) \mid g \in G\}$.

Si mostri che $\mathcal{H}$ è un sottogruppo di $\mathcal{G}$ se e solo se ϕ è un endomorfismo di G . In tal caso si consideri in $\mathcal{G}$ il sottogruppo $\mathcal{L} = \{(g, 1_G) \mid g \in G\}$ e si provi che

- i) è $\mathcal{H} \cap \mathcal{L} = \langle (1_G, 1_G) \rangle$ se e solo se ϕ è iniettiva;
- ii) è $\mathcal{H}\mathcal{L} = \mathcal{G}$ se e solo se ϕ è suriettiva;
- iii) è $\mathcal{G} = \mathcal{H} \times \mathcal{L}$ se e solo se G è abeliano e ϕ è un automorfismo di G .

9. Si G il gruppo delle funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ (rispetto alla composizione) del tipo

$$\begin{aligned} f_{a,b} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax + b \end{aligned}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Siano

$$T = \{f_{a,b} \in G \mid a = 1\} \quad e \quad D = \{f_{a,b} \in G \mid b = 0\}$$

e sia $\tau = f_{1,1} \in T$. Si dimostri che:

- a) ogni elemento non identico di T è coniugato di τ mediante un elemento di D ;
- b) se H è un sottogruppo di G contenente τ e D , allora $H = G$.