

ESERCIZI ALGEBRA 2

15 ottobre 2008 (14.00-15.30, AULA 1A150)

1. Sia $M_3(\mathbb{R})$ l'anello delle matrici 3×3 a coefficienti in $\mathbb{R}$, e siano dati i seguenti sottoinsiemi di $M_3(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ s & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

- a) Dimostrare che S è un sottoanello unitario di $M_3(\mathbb{R})$.
b) Dimostrare che J è un ideale bilatero di S .
c) Dimostrare che J non è né un ideale destro né un ideale sinistro di $M_3(\mathbb{R})$.

2. Sia K un campo; sia K^K l'anello costituito dalle applicazioni di K in sé stesso rispetto alle operazioni di somma e prodotto definite ponendo per $\lambda, \mu \in K^K$

$$\lambda + \mu : k \rightarrow \lambda(k) + \mu(k)$$

$$\lambda \cdot \mu : k \rightarrow \lambda(k) \mu(k).$$

Si mostri che l'anello $(K^K; +, \cdot)$ possiede unit  che ogni elemento non nullo e non unitario   un divisore dello zero.

3. Sia $(A; +, \cdot)$ un anello commutativo, dotato di unit . Sia

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in A \right\}$$

Si verifichi che H   un anello commutativo e dotato di unit  rispetto alla somma e al prodotto (righe per colonne) di matrici.

- I] Si mostri che se l'anello $(H; +, \cdot)$   privo di divisori dello zero, lo   anche l'anello $(A; +, \cdot)$, ma non viceversa.
II] Si provi che se $(A; +, \cdot)$   un campo, ogni elemento di H non nullo e non unitario   un divisore dello zero.
Si mostri che $(H; +, \cdot)$   un campo per $A = \mathbb{R}$ e non lo   per $A = \mathbb{C}$.
 $(H; +, \cdot)$   un campo per $A = \mathbb{Z}_3$? Per $A = \mathbb{Z}_5$?

4. Sia $(A; +, \cdot)$ un anello e sia $(A'; +, \cdot)$ una sua immagine omomorfa; sia $\phi : A \rightarrow A'$ un omomorfismo suriettivo. Sia J un ideale dell'anello $(A; +, \cdot)$.

- I] Si provi che, se J contiene il nucleo $\text{Ker}\phi$, gli anelli quoziente $(A/J; +, \cdot)$ e $(A'/\phi(J); +, \cdot)$ sono isomorfi.
II] Si mostri che, se J non contiene $\text{Ker}\phi$, gli anelli $(A/J; +, \cdot)$ e $(A'/\phi(J); +, \cdot)$ possono non essere isomorfi.

5. Sia R l'anello delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Definiamo

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 8b \\ 5b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \right\}.$$

- (a) Si provi che A   sottoanello di R .   anche ideale?
(b) Determinare la caratteristica di A .
(c) A   dominio d'integrit ?

6. Sia $(A; +, \cdot)$ un anello commutativo; sia $c \in A$, $c \neq 0_A$.

Si definisca in A un "prodotto" $\star$ ponendo per ogni $a, b \in A$

$$a \star b = a \cdot b \cdot c;$$

si osservi che $(A; +, \star)$   un anello.

Definita l'applicazione $\phi : A \rightarrow A$ ponendo $\phi(a) = ac$ per ogni $a \in A$, si provi quanto segue.

- I] L'applicazione ϕ   iniettiva se e solo se l'elemento c non   un divisore dello zero in $(A; +, \cdot)$;

- II] Sono tra loro equivalenti le seguenti condizioni:
- i) l'applicazione ϕ è biiettiva;
 - ii) l'anello $(A; +, \cdot)$ possiede unità e l'elemento c è unitario in $(A; +, \cdot)$;
 - iii) l'anello $(A; +, \star)$ possiede unità.
- III] $I = \{i \in A \mid ic = 0_A\}$ è un ideale dell'anello $(A; +, \star)$;
 $J = \text{Im } \phi = \{ac \mid a \in A\}$ è un ideale dell'anello $(A; +, \cdot)$.
- IV] L'anello quoziente $(A/I; +, \star)$ è isomorfo all'anello $(J; +, \cdot)$.

NOTA Siano R_1 e R_2 due anelli. Nell'insieme $R_1 \times R_2$ costituito dalle coppie (a, b) , con $a \in R_1$ e $b \in R_2$, si definiscano le seguenti operazioni:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 b_2).$$

L'insieme $R_1 \times R_2$ con queste due operazioni è un anello che prende il nome di *prodotto cartesiano* (o *somma diretta*) di R_1 e R_2 , spesso indicato nel modo seguente:

$$R_1 \oplus R_2.$$

7. Sia $n > 1$ un intero e si consideri l'anello

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right\}.$$

a) Si verifichi che le due applicazioni

$$f : R \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto a$$

$$g : R \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto c$$

sono omomorfismi suriettivi d'anello.

b) Si descrivano gli ideali $I = \text{Ker}(f)$ e $J = \text{Ker}(g)$.

c) Si costruisca un isomorfismo $R/(I \cap J) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

d) Sia $n = 5$. Si dica, per ciascuno degli anelli $R, R/I, R/(I \cap J)$, se si tratta eventualmente di un anello commutativo, di un dominio d'integrità, di un campo.

8. Siano X e Y due anelli commutativi e sia A la loro somma diretta ($A = X \oplus Y$).

Se I è un ideale di A , si ponga

$$I_X = \{v \in X \mid (v, y) \in I \text{ per qualche } y \in Y\}$$

$$I_Y = \{w \in Y \mid (x, w) \in I \text{ per qualche } x \in X\}$$

$$J = \{(v, w) \in A \mid v \in I_X, w \in I_Y\}$$

i] Si osservi che I_X, I_Y e J sono ideali rispettivamente di X, Y e A e che $I \subseteq J$.

ii] Si provi che

a) una condizione sufficiente affinché sia $I = J$ è che l'anello X (o l'anello Y) possieda unità,

b) una condizione sufficiente affinché sia $I = J$ è che l'anello quoziente A/I sia privo di divisori dello zero.

iii] Siano $X = Y = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ sottoanelli di $\mathbb{Z}$.

a) Si mostri che nessuna delle due condizioni date in ii] è necessaria affinché sia $I = J$, considerando $I = \{(4r, 4s) \mid r, s \in \mathbb{Z}\}$.

b) Si mostri che può essere $I \neq J$, considerando $I = \{(2r, 4s) \mid r, s \in \mathbb{Z}, r \equiv s \pmod{2}\}$.

Suggerimento:

ii] a) Se $(v, w) \in J$ e $(x, w) \in I$, allora $(x, 0) = (x, w)(1_X, 0) \in I$, $(0, w) \in I \dots$

ii] b) Se $(x, y) \in I$ allora $I = [(x, 0) + I] + [(0, y) + I] = [(x, 0) + I][(0, y) + I]$.