ESERCIZI ALGEBRA 2

19 novembre 2008 (14.00-16.30, AULA 1A150)

1. Sia S_6 il gruppo delle permutazioni sull'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e sia G il sottogruppo ciclico di S_6 generato dall'elemento $(1\,2\,3)\,(4\,5)$. Il gruppo G agisce quindi in modo naturale sull'insieme X.

a) Quali e quante sono le orbite di G in X? Quanti elementi hanno?

b) Il gruppo G agisce transitivamente su X?

c) Si calcoli lo stabilizzatore di 1 in G.

2. Sia G il gruppo delle matrici della forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ dove $a, b \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, $a \neq 0$.

a) Qual è l'ordine di G?

b) Si verifichi che $N = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & b \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \right\}$ è un sottogruppo normale di G.

c) Si controlli che $g = \begin{pmatrix} \bar{5} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{8} \end{pmatrix} \in G$ e se ne determini il periodo.

d) È vero che il sottogruppo ciclico generato da g è un sottogruppo di Sylow di G?

3. Nel gruppo S_8 delle permutazioni sull' insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ si consideri il sottoinsieme

$$G = \{\sigma \in S_8 \mid \sigma(x) \leq 5 \;\; \forall x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$

a) Si verifichi che G è un sottogruppo di S_8.

b) Si determini una permutazione $\tau \in G$ di periodo 15.

c) Esistono in G elementi di periodo 7?

d) Si calcoli $\mid G \mid$.

4. Sia Q il seguente sottogruppo di $GL_2(\mathbb{C})$:

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(detto gruppo dei quaternioni). Si consideri l'azione standard del gruppo Q su $\mathbb{C}^2$ determinata dal prodotto righe per colonne.

(a) Determinare le orbite di $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed i rispettivi stabilizzatori.

(b) Determinare il nucleo dell'azione.

(c) Determinare l'insieme dei punti fissi di $\mathbb{C}^2$ per l'azione di Q.

5. Siano $(G_1;\cdot)$ e $(G_2;\cdot)$ due gruppi ciclici non banali; sia $G = G_1 \times G_2$ il loro prodotto diretto. Si provi che il gruppo G è ciclico se e solo se G_1 e G_2 sono finiti e hanno ordini coprimi.

6. Siano $A \cong (\mathbb{Z}/75\mathbb{Z};+)$ e $B \cong (\mathbb{Z}/48\mathbb{Z};+)$ due gruppi ciclici; si ponga $G = A \times B$.

a) Si provi che G è ciclico.

b) Si determinino i sottogruppi di G di ordine 12 e si verifichi che sono ciclici.

7. Sia $\sigma = (1\,2)\,(3\,4\,5) \in S_5$; poniamo $H = \langle\sigma\rangle$.

i) Si provi che $H = \langle(1\,2)\,,(3\,4\,5)\rangle$.

ii) Si assegnino due omomorfismi distinti $\varphi : \mathbb{Z} \to S_5$ e $\psi : \mathbb{Z} \to S_5$ tali che $Im\,\varphi = Im\,\psi = H$.

iii) È vero che $H \cong S_3$?

8. Si consideri il gruppo $P = S_4 \times S_4$ (prodotto diretto esterno).

I) Sia $D = \{(\sigma,\sigma) \mid \sigma \in S_4\} \subseteq P$. Si verifichi che D è sottogruppo di P, e che D non è normale in P.

II) Dato $(\alpha,\beta) \in P$, si dimostri che $C_P\left((\alpha,\beta)\right) = C_{S_4}(\alpha) \times C_{S_4}(\beta)$.

III) Si contino i coniugati in P di $((2\,3\,4)\,,(1\,2)\,(3\,4))$.

9. Si considerino i gruppi abeliani $G_1 = (\mathbb{C};+)$ e $G_2 = (\mathbb{C}^\star;\cdot)$; sia $G = G_1 \times G_2$.

(a) Caratterizzare gli elementi di periodo finito di G.

(b) Verificare che l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & G & \to & G \\ & (x,y) & \mapsto & \left(4x, y^6\right) \end{array}$$

è un endomorfismo di G; determinare $Ker\,\varphi$ e dire se $Im\,\varphi$ è ciclico.

10. Nel gruppo S_5 si considerino le permutazioni

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = (1\,2\,5)\,(1\,4\,5)\,.$$

(a) Si scrivano α e β come prodotti di cicli disgiunti e se ne determinino il periodo e la classe;

(b) si verifichi che $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1}$.

(c) Qual è l'ordine del sottogruppo $H = \langle\alpha,\beta\rangle$?