ESERCIZI ALGEBRA 2

22 ottobre 2008 (14.00-16.00, AULA 1C150)

1. Siano $A, A_1, \ldots, A_n$, $n > 1$, anelli e siano $\phi_i : A \to A_i$, $1 \leq i \leq n$, omomorfismi d'anello. Si consideri l'omomorfismo $\phi : A \to A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ definito da $\phi(a) = (\phi_1(a), \phi_2(a), \ldots, \phi_n(a))$ per ogni $a \in A$.
Si verifichi che:

(a) $Ker(\phi) = \cap_{i=1}^{n} Ker(\phi_i)$;

(b) se ϕ_i è iniettiva per qualche i ($1 \leq i \leq n$), allora ϕ è iniettiva;

(c) se ogni ϕ_i è suriettiva, si può concludere che ϕ è suriettiva?

2. Si consideri l'applicazione $\varphi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ definita ponendo $\varphi(f) = f(0) + 11\mathbb{Z}$.

(a) dimostrare che φ è omomorfismo d'anelli;

(b) dimostrare che $Ker(\varphi) = \{11f + xg : f, g \in \mathbb{Z}[x]\}$ e che non è principale;

(c) dimostrare che $Ker(\varphi)$ è ideale massimale.

3. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e sia data l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{Z}[i] & \to & \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \\ & a+ib & \mapsto & a+5b+13\mathbb{Z} \end{array}$$

a) Dimostrare che F è un omomorfismo di anelli.

b) Dire se F è suriettivo.

c) Dire, motivando la risposta, se $Ker(F)$ è un ideale massimale.

d) Determinare un generatore del nucleo $Ker(F)$ di F.

e) Dimostrare che se $p \in \mathbb{Z}$ è un numero primo con $p \equiv 1 \pmod 4$ esistono esattamente due distinti omomorfismi di anelli $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

4. Si consideri $\mathbb{Z}[i]$.

(a) L'ideale I generato da $(2 - 4i)$ in $\mathbb{Z}[i]$ è primo?

(b) Provare che l'ideale J generato da $(1 - i)$ è massimale e contiene I.

(c) Provare che gli ideali generati da $(1 - i)$ e da $(1 + i)$ coincidono.

5. Sia $A = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-6}\right] = \left\{a + ib\sqrt{6} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ con norma $N : \mathbb{Z}\left[\sqrt{-6}\right] \to \mathbb{Z}$ definita da $N\left(a + ib\sqrt{6}\right) = a^2 + 6b^2$.

(a) Provare che non esistono elementi di A di norma 2 o 5.

(b) Provare che gli elementi 2, 5, $2 - i\sqrt{6}$ sono irriducibili ma non primi.

(c) Trovare due fattorizzazioni di 10 nel prodotto di due elementi irriducibili non associati.

(d) Provare che l'ideale generato da 2 e $\sqrt{-6}$ non contiene l'elemento 1.

6. Si consideri nel campo complesso il sottoanello

$$A = \left\{ a + ib\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

I] Si determinino

i) un isomorfismo α dell'anello quoziente $\left(\mathbb{Z}[x] / < x^2 + 7 >; +, \cdot\right)$ sull'anello $(A; +, \cdot)$,

ii) un omomorfismo suriettivo $\phi : \mathbb{Z}[x] \to A$ tale che $Ker(\phi) =< x^2 + 7 >$.

II] Si considerino nell'anello $(\mathbb{Z}[x]; +, \cdot)$ gli ideali $I =< x >$ e $J =< x, 7 >$; si mostri che

i) $I \neq J$, ma $\phi(I) = \phi(J)$;

ii) $\phi^{-1}(\phi(J)) = J$ mentre $\phi^{-1}(\phi(I)) \neq I$.

7. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e siano dati gli elementi $\alpha = -2 + 10i$ e $\beta = 9 + 7i$.

(a) Determinare il massimo comun divisore di α e β appartenente al primo quadrante del piano di Gauss.

(b) L'ideale I generato da α e β è principale? In caso affermativo, determinare un generatore per I.

(c) Sia J l'ideale generato da α e sia $\gamma = -1 + 2i$. Dire se $\gamma + J$ è un elemento invertibile di $\mathbb{Z}[i]/J$ ed in caso affermativo, determinarne l'inverso.

8. Siano $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e $f = x^3 - x + 1 \in K[x]$. Si consideri l'anello quoziente $A = K[x]/(f)$.

a) È vero che A è un campo?

b) Quanti sono gli elementi di A?

c) Si dica se $x^2 - x + 3 + (f)$ è un elemento invertibile di A, ed in caso affermativo se ne calcoli l'inverso.

9. Si consideri l'anello $\mathbb{Z}_4[x]$ dei polinomi a coefficienti nell'anello $\mathbb{Z}_4$.
Sia I l'ideale di $\mathbb{Z}_4[x]$ generato dal polinomio $x - 1 \in \mathbb{Z}_4[x]$. Si provi che

I] $I = \{f(x) \in \mathbb{Z}_4[x] \mid f(1) = 0\}$ (con $1, 0 \in \mathbb{Z}_4$);

II] I non è massimale ed esiste uno ed un solo ideale proprio J di $\mathbb{Z}_4[x]$ che contiene propriamente I;

III] J è finitamente generato, ma non è principale.

10. Sia $f = x^3 - 3x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$, e sia $A = \mathbb{Q}[x]/(f)$.

(a) Si fattorizzi f in prodotto di irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Si determini un divisore di zero non nullo in A.

(c) Si calcoli l'inverso di $3 - x^2 + (f)$ in A.

11. Determinare il MCD monico tra i polinomi $f = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 8x + 6$, $g = x^3 + x^2 + 3x + 3$ di $\mathbb{R}[x]$.
Scrivere tale MCD come combinazione lineare a coefficienti in $\mathbb{R}[x]$.
Nell'anello $\mathbb{R}[x]/(f)$, si trovi un elemento non nullo $h + (f)$ tale che $(g + (f))(h + (f)) = 0$.

12. Siano $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ e $g(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ appartenenti a $\mathbb{Q}[x]$.

i) Determinare il MCD in $\mathbb{Q}[x]$ di $f(x)$ e $g(x)$, ed esprimerlo nella forma $r(x)f(x) + s(x)g(x)$, con $r(x)$ e $s(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$.

ii) Sia $I = (f(x))$ e sia A l'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/I$. È vero che $g(x) + I$ è invertibile in A? È vero che $g(x) + I$ è divisore dello zero in A?