

ESERCIZI ALGEBRA 2

26 novembre 2008 (16.00-17.30, AULA 1C150)

1. Sia $G = S_4 \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

- a) Si scriva esplicitamente chi è il prodotto $(\sigma, a + 6\mathbb{Z})(\tau, b + 6\mathbb{Z})$, chi è l'unità di G e chi è $(\sigma, a + 6\mathbb{Z})^{-1}$.
- b) Si dica se G è ciclico.
- c) Scrivere un elemento di G di periodo 12.
- d) Quali tra i seguenti elementi di G sono coniugati:

$$a = ((1\ 2\ 3), 2 + 6\mathbb{Z}), \quad b = ((1\ 3\ 4), 3 + 6\mathbb{Z}), \quad c = ((1\ 2), 2 + 6\mathbb{Z}), \quad d = ((1\ 3\ 4), 2 + 6\mathbb{Z})?$$

- e) Trovare in G il centralizzante di a .

2. Determinare il campo di spezzamento E del polinomio $x^6 - 6x^3 + 8$ su $\mathbb{Q}$, il grado di E su $\mathbb{Q}$ e una $\mathbb{Q}$ -base di E .

3. Siano date le permutazioni di S_5 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare la decomposizione ciclica di σ e di τ ed il prodotto $\sigma\tau$.
- (b) L'elemento σ appartiene ad un sottogruppo di Sylow di S_5 ? In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow, in caso negativo, motivare la risposta.
- (c) L'elemento τ appartiene ad un sottogruppo di Sylow di S_5 ? In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow, in caso negativo, motivare la risposta.
- (d) Dimostrare che ogni 2-sottogruppo di Sylow di S_5 contiene un sottogruppo ciclico di ordine 4.
- (e) Determinare il centralizzatore $C_{S_5}(\sigma)$ di σ in S_5 e la cardinalità della classe di coniugio di σ .
- (f) Dire se $\langle \sigma \rangle = C_{S_5}(\sigma)$, motivando la risposta.

4. Sia G un gruppo di ordine 39.

- a) Determinare il numero n_{13} dei 13-sottogruppi di Sylow di G .
- b) Dimostrare che G possiede un sottogruppo normale H isomorfo a C_{13} ed un sottogruppo K isomorfo a C_3 .
- c) Dimostrare che $G = HK$ e che $H \cap K = \langle 1 \rangle$.

5. In $\mathbb{C}$ si consideri l'elemento $u = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

- (a) Si dimostri che u è algebrico su $\mathbb{Q}$.
- (b) Si determini il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$; quante sono le radici reali di f ?
- (c) Si trovi il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
- (d) Si trovi una base di $\mathbb{Q}(u)$ come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

6. Sia $G = S_5 \times C_2$ il prodotto diretto del gruppo simmetrico S_5 e del gruppo ciclico di ordine 2 di generatore x . Sia dato l'elemento di S_5

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Determinare l'ordine di σ in S_5 e l'ordine dell'elemento $(\sigma, x) \in G$.
 - b) L'elemento $(\sigma, 1)$ appartiene ad un sottogruppo di Sylow di G ? In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow, in caso negativo, motivare la risposta.
 - c) L'elemento (σ, x) appartiene ad un sottogruppo di Sylow di G ? In caso affermativo, determinare un tale sottogruppo di Sylow, in caso negativo, motivare la risposta.
 - d) Determinare il centralizzatore $C_{S_5}(\sigma)$ di σ in S_5 e la cardinalità della classe di coniugio di σ in S_5 .
 - e) Determinare il centralizzatore $C_G((\sigma, x))$ di (σ, x) in G e la cardinalità della classe di coniugio di (σ, x) in G .
7. a) Determinare il centralizzante in S_6 della permutazione $\sigma = (12346)$;
- b) Quante classi di coniugio di elementi di ordine 5 ci sono in A_6 ?
Per ognuna di queste se ne dia un rappresentante e se ne calcoli l'ordine.
- c) Si verifichi che $C_{S_6}((123)) \neq A_6$ e se ne deduca che i 3-cicli formano un'unica classe di coniugio in A_6 .
8. Sia $p(x) = x^3 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$.
- a) Fattorizzare $p(x)$ su $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$.
 - b) Determinare il campo di spezzamento K di $p(x)$ e il grado di K su $\mathbb{Q}$.
 - c) È vero che $K = \mathbb{Q}(i\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})$?

9. Trovare il campo di spezzamento del polinomio $x^4 + 1$ su $\mathbb{R}$, su $\mathbb{Q}$ e sul campo con 16 elementi.