

ESERCIZI ALGEBRA 2

29 ottobre 2008 (14.00-15.30, AULA 1C150)

1. Sia $\mathbb{R}$ il campo dei reali. Sia

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\};$$

si verifichi che G è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di G :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}; K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R} \right\}; L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si dica, giustificando la risposta, quali di questi sono sottogruppi di G , e quali sono sottogruppi normali di G .

2. Sia $F = \mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ e siano dati i polinomi $a(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ e $b(x) = x^2 + x + 2 \in F[x]$.

- (a) Determinare la scomposizione in irriducibili di $a(x)$ e di $b(x)$ in $F[x]$ motivando la risposta.
- (b) Sia $I = (b(x))$. Dire, motivando la risposta, se $a(x) + I$ è invertibile in $F[x]/I$ ed in caso affermativo determinare l'inverso.
- (c) Dire, motivando la risposta, se $2x + 1 + I$ è invertibile in $F[x]/I$ ed in caso affermativo determinare l'inverso.

3. Sia R l'anello $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, dove p è un primo. Sia G il gruppo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1+pa & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$$

(è sottogruppo del gruppo degli invertibili dell'anello delle matrici 2×2 a coefficienti in R).

- a) Si scriva esplicitamente l'inverso di $\begin{pmatrix} 1+pa & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- b) Qual è l'ordine di G ?

- c) Si provi che il sottoinsieme

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1+pb & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in R \right\}$$

è un sottogruppo di G .

- d) H è ciclico? È normale in G ?

4. Sia $G = U(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})$ il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$.

- a) Qual è l'ordine del gruppo G ?
- b) Si verifichi che $6 + 25\mathbb{Z}$ e $7 + 25\mathbb{Z}$ appartengono a G , e se ne determinino i periodi.
- c) È vero che G è un gruppo ciclico?

5. Sia dato l'anello $\mathbb{Z}_2[x]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e siano I l'ideale generato da $x^3 + 1$ ed $R = \mathbb{Z}_2[x]/I$.

- (a) Si determinino l'ordine e la caratteristica di R e si elenchino i suoi elementi.
- (b) Si determinino in R i divisori dello zero e gli elementi invertibili con i relativi inversi.
- (c) Si dimostri che

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{Z}_4 &\rightarrow R \\ a &\mapsto \bar{a} + \bar{a}x + \bar{a}x^2 + I, \end{aligned}$$

dove $\bar{a}$ denota la classe di a modulo 2, è un morfismo di anelli.

- (d) Si determinino il nucleo e l'immagine di φ .

6. Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e siano dati gli elementi $z_1 = 1 + 3i$ e $z_2 = 5i$.

- (a) Determinare il massimo comun divisore di z_1 e z_2 appartenente al primo quadrante del piano di Gauss.
- (b) L'ideale I generato da z_1 e z_2 è principale? In caso affermativo, determinare un generatore per I .
- (c) Sia J l'ideale generato da z_1 . Si dica se $z_2 + J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}[i]/J$ ed in caso affermativo, determinarne l'inverso.
- (d) Si dica se $z_2 + J$ è un divisore dello zero in $\mathbb{Z}[i]/J$ ed in caso affermativo, determinare un elemento $c + J \neq J$ tale che $(z_2 + J)(c + J) = J$.
- (e) Si scrivano tutti gli ideali non banali di $\mathbb{Z}[i]/J$. Quali di questi sono massimali?