ESERCIZI ALGEBRA 2

3 dicembre 2008 (14.00-17.00, AULA 1C150)

1. Sia $\alpha = \sqrt{3} + \frac{i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$.

a) Dimostrare che α è algebrico su $\mathbb{Q}$ e determinare il suo polinomio minimo m su $\mathbb{Q}$.

b) Verificare che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{3}, i\sqrt{2}\right)$.

c) Verificare se $\mathbb{Q}(\alpha)$ è campo di spezzamento di m su $\mathbb{Q}$.

d) Verificare che $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{Q}\left(i\sqrt{2}\right) \subsetneqq \mathbb{Q}(\alpha)$ e che $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$.

2. Sia $u = \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25} \in \mathbb{R}$.

i) Provare che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{5}\right)$ e dedurne $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]$.

ii) Sia $v = i + \sqrt[3]{5}$; calcolare il polinomio minimo di v su $\mathbb{Q}(u)$.

iii) Calcolare il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$.

3. a) Si provi che un gruppo di ordine 91 è ciclico.

b) Si provi che un gruppo di ordine 616 non è semplice.

c) Supponiamo che G sia un gruppo semplice di ordine 168. Contare i 7-Sylow di G e gli elementi di ordine 7.

4. Sia $u = \sqrt{3 + \sqrt{11}}$.

a) Si verifichi che u è algebrico su $\mathbb{Q}$ e se ne trovi il polinomio minimo g su $\mathbb{Q}$.

b) Si determini il polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}\left(\sqrt{11}\right)$.

c) Si scriva $\frac{2u}{u^3-6u}$ come espressione polinomiale in u a coefficienti razionali.

d) Indicato con E il campo di spezzamento di g su $\mathbb{Q}$, si determini $[E : \mathbb{Q}]$.

5. Sia ξ una radice primitiva sesta di 1 in $\mathbb{C}$.

(a) Determinare il polinomio minimo di ξ su $\mathbb{Q}$.

(b) Dimostrare che $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right) \leq \mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\xi\right)$.

(c) Determinare il polinomio minimo $p(x)$ di $\sqrt{3}\xi$ su $\mathbb{Q}$.

(d) Dire se $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\xi\right)$ è campo di spezzamento per $p(x)$ su $\mathbb{Q}$.

6. Si consideri il polinomio $f = x^3 + x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

i) Si verifichi che f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

ii) Sia u una radice di f. Si scriva l'elemento $\frac{2u}{u+1} \in \mathbb{Q}(u)$ come espressione polinomiale in u a coefficienti razionali.

iii) Si determini il polinomio minimo di $v = u^2$ su $\mathbb{Q}$.

7. Sia dato $\alpha = \sqrt{7} + i \in \mathbb{C}$.

(a) Dimostrare che α è algebrico su $\mathbb{Q}$.

(b) Dimostrare che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, i)$.

(c) Determinare il polinomio minimo $m(x)$ di α su $\mathbb{Q}$, motivando la risposta.

(d) Dire se $\mathbb{Q}(\alpha)$ è il campo di spezzamento E per $m(x)$ su $\mathbb{Q}$.

(e) Determinare il grado di E su $\mathbb{Q}$.

8. Sia $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

a) Si determinino tutti i polinomi in $\mathbb{F}_2[x]$ irriducibili di terzo grado.

b) Si fattorizzi in prodotto di irriducibili il polinomio $x^8 - x \in \mathbb{F}_2[x]$.

c) Si dimostri che se $g \in \mathbb{F}_2[x]$ è irriducibile di grado n, allora g divide il polinomio $x^{2^n} - x \in \mathbb{F}_2[x]$.

9. Sia u una radice del polinomio $g = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Si verifichi che g è polinomio minimo di u su $\mathbb{Q}$.

b) Si verifichi che $u^2 - 2$ è un'altra radice di g.

c) $\mathbb{Q}(u)$ è campo di spezzamento per g su $\mathbb{Q}$.