

Lezione di Algebra 2 del 13 ottobre 2008 (2 ore)

B. Bruno

Esercizio 1

Dimostrazione dell'esercizio 8 del 6/10.

Esercizio 2

Sia R un anello commutativo, N l'insieme degli elementi nilpotenti di R . Provare che N è un ideale di R e che R/N non ha elementi nilpotenti $\neq 0$.

Esercizio 3

Sia S un insieme e sia $(P(S), +, \cdot)$ l'anello delle parti di S , con le operazioni definite come nell'esempio 4.1.2 (e), del testo. Si provi che:

- (i) Se $A \subseteq S$ allora $P(A)$ è un ideale di $P(S)$ ed è $P(A) = (A)$ (=ideale generato da A).
- (ii) Se I è un ideale di $P(S)$ ed A e $B \in I$, allora anche $A \cup B \in I$.
- (iii) Se S è finito ed I è un ideale di S , allora esiste $A \in I$, tale che $I = P(A)$ (dunque ogni ideale in $P(S)$ è principale).
- (iv) Si provi che se S è infinito, allora $I = \{A \in P(S) : A \text{ è un sottoinsieme finito di } S\}$ è un ideale di $P(S)$, ma non è principale.

Esercizio 4

Sia $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Si provi che:

- (i) R è un sottoanello di $M_2(\mathbb{R})$, commutativo con 1_R .
- (ii) R è dominio di integrità?
- (iii) Sia $N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$. È vero che N è un ideale di R ?
- (iv) Trovare tutti gli ideali di R .

Esercizio 5

Sia R un anello commutativo ed unitario e siano I e J due ideali di R . Si provi che $I \cap J$, $I + J$ ed $I \cdot J$ (si vedano le definizioni nell'esercizio 3 di 4.3 a p. 165) sono ideali di R e che, se $I + J = R$, allora $I \cdot J = I \cap J$.

Esercizio 6

Siano R_1 ed R_2 anelli. Si veda la definizione di "somma diretta", $R_1 \times R_2$ di R_1 ed R_2 al punto (g) di 4.1.2, p. 153 del testo e si provi che:

- (i) $R = R_1 \times R_2$ è un anello.
- (ii) R non è un dominio di integrità (anche se R_1 ed R_2 lo sono).
- (iii) Si trovino gli elementi invertibili e gli elementi nilpotenti di R .
- (iv) Si trovino tutti i divisori di 0 in R .

Esercizio 7

Enunciato del Teorema cinese del resto per un anello R : si veda l'Esercizio 1 del 15 ottobre 2008.