Lezione di Algebra 2 del 18 novembre 2008 (2 ore)

B. Bruno

Esercizio 1
(i) Sia $\tau = (1\ 2) \in S_n$ $(n > 2)$. Determinare il $C(\tau)$ (=centralizzante di τ) in S_n.
(ii) Per quali m un ciclo $\gamma \in S_n$, di lunghezza m, è tale che $C(\gamma) = <\gamma>$?

Esercizio 2 (Si veda 5.12.8)
(i) (Sia G un gruppo finito e $|G| = p^\alpha m$, con $(m, p) = 1$. Si provi che esiste una sequenza di sottogruppi di G, $H_0 = \{1_G\} \subset H_1 \subset H_2 \cdots \subset H_\alpha$, tali che $\forall i = 1, 2, \ldots \alpha$ è $H_{i-1} \triangleleft H_i$ ed H_i/H_{i-1} ha ordine p.
(ii) Sia G come in (i); si provi che allora G contiene un sottogruppo di ordine p^i, $\forall i = 0, 1, 2, \ldots \alpha$.

Esercizio 3
Sia G un gruppo finito e sia H un sottogruppo di G. Delle seguenti affermazioni si dica quale è vera e quale è falsa, giustificando ogni risposta o fornendo un controesempio.
(a) Se $(G : H) = p$ allora H è massimale in G.
(b) Se $(G : H) = p$ allora H è normale in G.
(c) Se $(G : H) = 3$ e $|G|$ è dispari, allora H è normale in G.

Esercizio 4
Sia G un gruppo di ordine p^2q^2 con p e q primi distinti e tali che p^2 non sia congruo ad 1, mod. q, e q^2 non sia congruo ad 1 mod. p.
(i) Si dica quanti sono i p-sottogruppi di Sylow ed i q-sottogruppi di Sylow di G.
(ii) Si dimostri che G è abeliano.
(iii) Si provi che G non è necessariamente ciclico fornendo un controesempio.

Esercizio 5
Sia G un gruppo e sia $H = G \times G$ il prodotto diretto di due sottogruppi uguali a G. Sia $\Delta(H) = \{(g, g) : g \in G\}$ ($\Delta(H)$ prende il nome di *diagonale di* H).
(i) Si provi che $\Delta(H)$ è un sottogruppo di H e che $\Delta(H)$ è isomorfo a G.
(ii) Si provi che $\Delta(H) \triangleleft H$ se e solo se G è abeliano.

Esercizi non svolti:
Esercizi 1 e 2 dell'esame del 20/12/2004; esercizi 2 e 3 dell'esame del 12/1/2005.