

Lezione di Algebra 2 del 20 ottobre 2008 (2 ore)

B. Bruno

Esercizio 1

Nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$, si determinino tutti gli elementi invertibili.

Esercizio 2

Si provi che:

(2.a) Un elemento $a + ib \in \mathbb{Z}[i] : a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ è primo in $\mathbb{Z}[i]$, se e solo se $N(a + ib) = a^2 + b^2 = p$ primo di $\mathbb{Z}$.

(2.b) Un elemento p , primo in $\mathbb{Z}$ è primo in $\mathbb{Z}[i]$ se e solo se $p = 3 + 4n$ per un $n \in \mathbb{Z}$ (ossia p è congruo a 3 modulo 4).

Si deduca che a (oppure ib) è primo in $\mathbb{Z}[i]$ se e solo se, per un primo $p \in \mathbb{Z}$, è $a = p = 3 + 4n$ ($b = p = 3 + 4n$) per un $n \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 3

Si provi il seguente Teorema (di Fermat): Un primo $p \in \mathbb{Z}$ è somma di quadrati in $\mathbb{Z}$, (ossia è del tipo $p = a^2 + b^2$ per $a, b \in \mathbb{Z}$) se e solo se $p = 2$ oppure $p = 1 + 4n$ per un $n \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 4

Siano $z_1 = 5 + 3i$ e $z_2 = 3 + i$.

(4.a) Si trovi un MCD, (z_1, z_2) tra $z_1 = 5 + 3i$ e $z_2 = 3 + i$ che stia sul primo quadrante.

(4.b) Si provi che $1 + 2i$ è invertibile in $\mathbb{Z}[i]/J$, dove $J = (z_1)$ (=ideale generato da z_1) e se ne trovi l'inverso.