Lezione di Algebra 2 del 21 novembre 2008 (2 ore)

B. Bruno

Esercizio 1 Siano $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$ e $\tau = (1\ 5\ 3\ 7)(2\ 8\ 4\ 6)$, permutazioni in S_8, come nell'esercizio 5, fila A, del compito del 31/10. Allora si ha:
(a) $G =< \sigma, \tau >$, dove $|\sigma| = |\tau| = 4$.
(b) $\sigma\tau = \tau^{-1}\sigma$.
(c) $\sigma^2 = \tau^2$.
Si dimostri, utilizzando solamente quanto contenuto in (a), (b) e (c), che:
(i) $\sigma\tau^j = \tau^{-j}\sigma$, $\forall j \in \mathbb{Z}$ e che ogni elemento $g \in G$ è del tipo: $g = \sigma^i\tau^j$, per opportuni interi i e j. Dedurre che allora, posto $H =< \tau >$, H e σH sono le uniche classi laterali di H in G.
(ii) si determinino tutti gli elementi di G, indicandone l'ordine e si scrivano tutte le classi coniugate di elementi di G.
(iii) Si provi che $Z(G) =< z >$, (dove $z = \sigma^2 = \tau^2$) ed è quindi $|Z(G)| = 2$ e si scriva l'equazione delle classi per G.
(iv) Si dica quali sono i sottogruppi di G e si provi che sono tutti normali in G.
Un gruppo G con le proprietà (a), (b) e (c) (e quelle da queste dedotte), si chiama *gruppo dei quaternioni di ordine 8* e si indica con Q_8. Dunque S_8 contiene un sottogruppo (isomorfo a) Q_8.

Esercizio 2 Si considerino le seguenti matrici di $M_2(\mathbb{C})$: $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si provi che appartengono a $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ e che il sottogruppo $Q =< A, B >$ di $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ soddisfa le proprietà (a), (b) e (c) dell'esercizio 1 ed è quindi isomorfo a Q_8.

3. Definizione. Sia G un gruppo e siano N ed H sottogruppi di G con le seguenti proprietà:
(a) N è sottogruppo normale di G;
(b) $G = NH$;
(c) $N \cap H = \{1_G\}$.
Allora si dice che G è *prodotto semidiretto* dei sottogruppi N ed H.
Si provi che se $n, n' \in N$ e $h, h' \in H$, allora $(nh)(n'h') = (n\psi_h(n'))(hh')$ dove ψ_h è l'automorfismo (verificare che lo è) di N definito da: $\psi_h(n) = hnh^{-1}, \forall n \in N$.

Esercizio 4 (Esempio)
(i) Si provi che il gruppo diedrale D_n è prodotto semidiretto di certi sottogruppi N ed H, indicando di quali sottogruppi si tratta.
(ii) Si provi che $Z(Dn) = \{1\}$ se n è dispari e che $Z(Dn) =< r^{n/2} >$ (dove r è la rotazione di $2\pi/n$) se n è pari. Qual è $|Z(D_n)|$ in questo caso?

Esercizio 5 (Secondo esempio)
Sia G un gruppo di ordine pq con $p < q$ primi.
(i) Si provi che un q-sottogruppo di Sylow di G è normale in G. Quanti sono allora i q-sottogruppi di Sylow di G?

(ii) Si provi che se G non è abeliano allora G è prodotto semidiretto di certi suoi sottogruppi. Si provi inoltre che questo si verifica solo se p divide $q-1$. Quanti sono, in questo caso, i p-sottogruppi di Sylow di G?
(iii) Si provi che G è necessariamente abeliano, e quindi ciclico, se p non divide $q-1$.