Lezione di Algebra 2 del 22 ottobre 2008 (1 ora)

B. Bruno

Esercizio 1
Si provi che se J è un ideale nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$, e $0 \neq a+ib \in J$, allora $k = N(a+ib) = a^2+b^2 \in J$ e, se r ed s sono i resti delle divisioni di a e, rispettivamente, b, per k, allora $(a+ib)+J = (r+is)+J$. Se ne deduca che l'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/J$ è finito, per ogni ideale J non nullo di $\mathbb{Z}[i]$.

Esercizio 2
Sia $I = \left((x^2-2)^2\right)$ in $\mathbb{Q}[x]$ e sia $A = \mathbb{Q}[x]/I$.
(i) Si provi che A non è un campo.
(ii) Sia $a = f(x)+I \in A$: si dica come si può scegliere un rappresentante $f(x)$ della classe a.
(iii) Si provi che $(x+1)+I$ è invertibile in A e se ne calcoli l'inverso.
(iv) Sia $M = \{\text{elementi non invertibili di } A\}$. Si provi che M è un ideale di A.
(v) Si provi che A/M è un campo.

Definizione Sia R un anello: si è visto il significato di nr, $\forall n \in \mathbb{Z}$ ed $r \in R$. Supponiamo che ci sia un $n > 0, \in \mathbb{N}$ tale che $nr = 0$, $\forall r \in R$. Sia $k = \min\{n \in \mathbb{N} : n > 0 \text{ ed } nr = 0, \forall r \in R\}$. Allora k si chiama *caratteristica di* R e si dice che R è un anello di caratteristica $k > 0$.
Se non esiste nessun $n > 0$ per cui si abbia $nr = 0$, $\forall r \in R$: allora si dice che R ha caratteristica 0.
Notiamo che un anello R ha caratteristica $k = 1$ se e solo se $R = \{0_R\}$.

Esercizio 3
Sia R un dominio di integrità (quindi $R \neq \{0_R\}$) e sia $m > 0, \in \mathbb{N}$ tale che, per un elemento $0 \neq a \in R$ si abbia $ma = 0_R$. Si dimostri che allora, $\forall b \in R$, si ha $mb = 0_R$ (e quindi R ha caratteristica $k > 0$ e $k \leq m$).

Esercizio 4
Sia R un dominio di integrità e sia k la caratteristica di R. Si provi che allora $k = p$, p un primo di $\mathbb{N}$.

Esercizio
Sia R un anello commutativo unitario, di caratteristica $k \geq 0$ e sia 1_R l'unità di R.
Sia $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ l'applicazione definita da: $\phi(n) = n \cdot 1_R$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Si dimostri che:
(i) se $k = 0$ allora ϕ è iniettiva e quindi $\phi(\mathbb{Z}) = \text{Im}\mathbb{Z}$ è un sottoanello di R isomorfo a $\mathbb{Z}$.
(ii) se $k > 0$ $\text{Ker}\phi = k\mathbb{Z}$ e quindi $\phi(\mathbb{Z}) = \text{Im}\mathbb{Z}$ è un sottoanello di R isomorfo a $\mathbb{Z}_k$.
In entrambi i casi $\phi(\mathbb{Z})$ si chiama *sottoanello fondamentale* di R.