

Lezione di Algebra 2 del 27 ottobre 2008 (2 ore)

B. Bruno

Esercizio 1

Sia R un anello. Si dimostri che :

- (i) esiste un anello unitario A , di caratteristica 0 che contiene un sottoanello isomorfo ad R : ciò si esprime anche dicendo che “ R si immerge in un anello unitario A di caratteristica 0”.
- (ii) Se R ha caratteristica $k > 0$, si può costruire un anello unitario B , di caratteristica k , che contiene un sottoanello isomorfo ad R (ossia “ R si immerge in un anello unitario B di caratteristica k ”).

Esercizio 2 Sia $A = \mathbb{Z}_7[x]/J$ dove $J = ((x^4 + 3))$.

- (i) Decomporre $f(x) = x^4 + 3$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}_7[x]$.
- (ii) Si provi che $(x^2 + 1) + J$ è invertibile in A e se ne trovi l'inverso.
- (iii) Si provi che $(x^2 - 4x + 3) + J$ è divisore di zero in A .
- (iv) Si determini l'ordine del sottogruppo degli elementi invertibili di A .

Esercizio 3

In S_5 si consideri la permutazione $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Si calcolino le successive potenze di σ e si trovi $|\sigma|$.

Esercizio 4

Richiamo sulla definizione di ciclo, come tipo particolare di permutazione in S_n che si rappresenta mediante una sequenza ordinata di elementi. Ad esempio, in S_8 , $\gamma = (1 \ 5 \ 7 \ 4 \ 2 \ 3)$ rappresenta la permutazione che manda 1 in 5, 5 in 7, 7 in 4, 4 in 2, 2 in 3, 3 in 1 e fissa i restanti elementi di $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Allora $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 7 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Due cicli si dicono disgiunti se nessuno degli elementi che compaiono in uno compare nell'altro (ovvero ognuno fissa gli elementi spostati dall'altro).

Ogni permutazione di S_n si può scrivere come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni (cicli di lunghezza 2) (ad esempio, $\gamma = (1 \ 5 \ 7 \ 4 \ 2 \ 3) = (1 \ 3) (1 \ 2) (1 \ 4) (1 \ 7) (1 \ 5)$).

Si provi che :

- (i) l'ordine di un ciclo coincide con la lunghezza del ciclo ossia con il numero di elementi che vi compaiono;
- (ii) cicli disgiunti commutano;
- (iii) se $\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_r$ dove i γ_i sono tutti cicli disgiunti di lunghezze m_i , allora l'ordine di σ è il minimo comune multiplo degli m_i . (Si inizi col provare che se a e b sono elementi di un gruppo G , di ordini rispettivamente m ed n , tali che $ab = ba$ e che $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1_G$ ($\langle a \rangle$ =gruppo ciclico generato da a) allora $|a \cdot b| = [m, n]$ =minimo comune multiplo di m e n).