

Lezione di Algebra 2 del 28 ottobre 2008 (1 ora)

B. Bruno

Esercizio 1

Sia $\sigma = (1 \ 3 \ 5 \ 4)(4 \ 2 \ 6)(1 \ 2 \ 3 \ 6) \in S_6$.

- (i) Si scriva σ come prodotto di cicli disgiunti e se ne determini l'ordine.
- (ii) Si scriva σ come prodotto di trasposizioni e si dica se σ appartiene ad A_6 .

Esercizio 2

Sia D_4 il gruppo diedrale di ordine 8.

- (i) Si scrivano tutti gli elementi di D_4 come permutazioni sull'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$.
- (ii) Si calcolino gli ordini degli elementi di D_4 utilizzando le rappresentazioni trovate in (i).
- (iii) Si provi che ρ^2 commuta con tutti gli elementi di D_4 .
- (iv) Si provi che $D_4 = \langle \rho, \sigma \rangle$, dove ρ è la rotazione di $\pi/2$ e σ è il ribaltamento attorno alla retta per i punti medi dei lati verticali.
- (v) Si provi che $D_4 = \langle \tau, \sigma \rangle$, dove τ è il ribaltamento attorno alla retta per i punti medi dei lati orizzontali.

Esercizio 3 (Sulla definizione di “prodotto diretto” (esterno) di due gruppi G_1 e G_2 si veda 5.14.1 p.282 del testo).

Si provi che il gruppo $G = G_1 \times G_2$ contiene due sottogruppi H_1 ed H_2 che hanno le seguenti proprietà:

- (i) $\forall h_1 \in H_1$ e $h_2 \in H_2$ si ha che $h_1 h_2 = h_2 h_1$.
- (ii) $H_1 \cap H_2 = 1_G$
- (iii) $G = H_1 H_2 = \{h_1 h_2 : h_i \in H_i, \text{ per } i = 1, 2\}$