

Metodi matematici

orale del 22 dicembre 2006

(1) Si provi che le soluzioni $u = u(x, y)$ dell'equazione differenziale

$$\partial_x u(x, y)M(x, y) + \partial_y u(x, y)N(x, y) = 0,$$

sono tutte e sole le funzioni u costanti sulle curve $t \mapsto (x(t), y(t))$ che soddisfano

$$\begin{cases} \dot{x} = M, \\ \dot{y} = N. \end{cases}$$

(2) Si provi che l'operatore di Laplace $\partial_x^2 + \partial_y^2$ agisce sulle funzioni radiali, cioè dipendenti soltanto dal modulo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, come l'operatore $\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r$.

(3) Si discuta il dominio massimale di esistenza della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = y_o \text{ per } y_o > 0. \end{cases}$$

(4) In uno spazio completo V e per un sistema ortonormale $\{e_n\}$ si definiscano i coefficienti di Fourier di un generico vettore $v \in V$ mediante $c_n = \langle v, e_n \rangle$. Si provi che

$$v = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e_n,$$

se e solo se

$$\|v\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2.$$

vskip1cm tempo: 1 h.